Czy bukmacher może przyjmować zakłady od samego siebie?

Prof. dr Bolesław KOPOCIŃSKI

Bukmacher kojarzy się nam zwykle z angielskim hazardzistą, który ryzykując własnym kapitałem przyjmuje karkołomne zakłady. Czy przyjmuje je od samego siebie? Grającym jest to raczej obojętne. Ale bukmacherem jest także pośrednik w grze w totalizatora, człowiek, który nie angażując własnego kapitału organizuje grę innych. Zazwyczaj grający utrzymują wzajemnie w tajemnicy swoje typy, ale poznaje je wszystkie bukmacher. Powstaje więc obawa, że biorąc udział w grze wykorzysta on te informacje na szkodę współgrających. Pokażemy teraz na przykładzie gry *orzeł czy reszka*, jak wielkie korzyści może on przy tym uzyskać.

Gra *orzeł czy reszka* jest dość nudną formą hazardu, ale stanowi wdzięczny przedmiot rozważań matematycznych. W grze dwóch osób jedna rzuca monetą, a druga odgaduje wynik. Odgadując wygrywa stawkę, nie odgadując – przegrywa. Gdy w grze uczestniczy kilka osób, bukmacher zbiera typy, rzuca monetą i dzieli zebraną pulę między wygrywających (ewentualnie zwraca stawki, gdy nikt nie wygrał). Gra jest sprawiedliwa, każdy ma zapewnioną oczekiwaną wygraną w wysokości stawki.

Pozwólmy teraz bukmacherowi zagrać wraz z innymi. Oczywiście, nie stara się on przewidzieć wyniku rzutu monetą, ale postara się manipulować wysokością wypłat. Optymalna strategia bukmachera jest prosta: jeśli większość grających stawia na orła, to on stawia na reszkę, jeśli przeciwnie, to on stawia na orła. W rezultacie, przy rzucie idealną monetą, bukmacher wygrywa z taką samą częstością jak inni, ale zawsze, gdy wygrywa, pula jest dzielona między małą liczbę wygrywających, a więc wygrane są wysokie.

Przy równej liczbie typów na orła i na reszkę bukmacherowi, jak się to później okaże, nie opłaca się grać. Przymuszony do gry może typować z jednakowym skutkiem na orła lub reszkę; powiedzmy więc, że stawia wtedy zawsze na orła.

Niech n będzie liczbą grających i X oznacza liczbę osób stawiających na orła. Gdy zdarzy się, że $X = k$ i k jest małe, tzn. $k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}]$ (przez $[x]$ oznaczamy część całkowitą liczby x), wówczas wygrana bukmachera wynosi $\frac{n+1}{k+1}$, ale, oczywiście, tylko wtedy, gdy w rzucie monetą padnie orzeł; wygrana wyniesie 0, gdy padnie reszka. Średnio zysk, po odliczeniu stawki, wyniesie więc $\frac{1}{2}\frac{n+1}{k+1} - 1$. Podobnie analizujemy sytuację przy dużym k i otrzymujemy wzór na zyski bukmachera:

$$Z_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{n+1}{k+1} - 1\,, & \text{jeśli } k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}]\,, \\ \frac{1}{2}\frac{n+1}{n-k+1} - 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Aby określić, jak często pojawia się zdarzenie $X = k$, przyjmijmy, że grający z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ typują orła lub reszkę i czynią to niezależnie jeden od drugiego. Wówczas to zdarzenie ma prawdopodobieństwo dwumianowe $\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^n$. Oczekiwana wygrana bukmachera wynosi

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n Z_{n,k}\,.$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$Z_n = \binom{n+1}{[\frac{n}{2}]+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

czyli tzw. wyraz środkowy w rozkładzie dwumianowym dla $n+1$ prób pomniejszony o wyrazy skrajne. Gdy zmieniamy n, wówczas największą wartość wygranej uzyskujemy przy $n = 5$ i wynosi ona $Z_5 = 0,281$. Asymptotycznie $Z_n \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$, gdy $n \to \infty$. Zauważmy, że $Z_n \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Bukmacher może próbować zwiększyć zysk zwielokrotniając swój udział w grze lub wstrzymując się czasami od gry. Przypuśćmy, że stawia on $r = r(k)$ razy na orła, gdy $X = k$ i k jest małe i tyleż razy na reszkę, gdy $X = n - k$ i k jest małe.

Rozwiązanie zadania F 284.
Strumień magnetyczny Φ przenikający przez powierzchnię otoczoną konturem nadprzewodzącym jest stały, ponieważ siła elektromotoryczna indukcji

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = RI = 0, \text{ (bowiem } R = 0).$$

Przy spadaniu ramki strumień przenikający ją wynosi

$$\Phi = a^2 B_0 + a^2 \alpha z + LI\,,$$

ale ponieważ $\Phi = const$, więc

$$LI = -\alpha z a^2\,,$$

czyli

$$I = -\frac{\alpha z a^2}{L}.$$

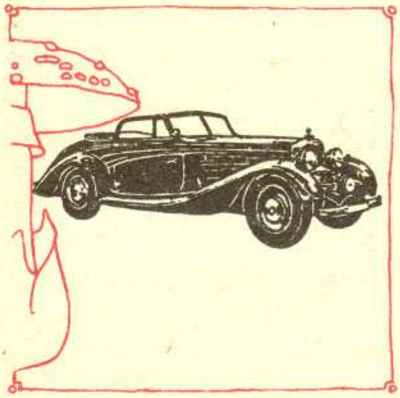
Siła wypadkowa działająca na ramkę z prądem I wynosi

$$F = a^2 \alpha I = -\frac{a^4 \alpha^2 z}{L}$$

i skierowana jest wzdłuż osi z.
Równanie ruchu ramki

$$m\ddot{z} = -mg - \frac{a^4 \alpha^2 z}{L}.$$

Ruch będzie podobny do ruchu masy zawieszonej na sprężynie w polu grawitacyjnym. Ramka będzie wykonywać drgania harmoniczne o częstości $\omega = \frac{a^2\alpha}{\sqrt{Lm}}$ wokół położenia równowagi $z_0 = -\frac{mgL}{a^4\alpha^2}$.



Rozwiązanie zadania F 285.
Indukcja B pola magnetycznego wewnątrz walca jest równa zeru, na zewnątrz, w pobliżu powierzchni wynosi $B = \mu_0 I/(2\pi R)$. Ciśnienie wywierane przez pole magnetyczne, jakie działa na ten walec, jest równe

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^2}.$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy $p_m \cong 6,4 \times 10^4$ N/m^2. A więc w naszym przypadku $p_m < p$ (p – ciśnienie wewnętrzne w plazmie), co oznacza, że plazma będzie się rozszerzać. Warunek równowagi $p_m = p$ nastąpi przy przepływie prądu o natężeniu $I = 1,25 \times 10^5$ A.

W dalszych rozważaniach, podobnie jak poprzednio, dokładniej opisujemy przypadek $k = 0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}]$, nie zapominając przy obliczaniu globalnego zysku o symetrycznym wariancie strategii. Zysk przy $X = k$ wynosi teraz

$$Z_{n,k}(r) = \frac{1}{2}\frac{n+r}{k+r}r - r, \quad \text{jeśli} \quad k = 0, 1, \ldots, [\tfrac{n}{2}].$$

To wyrażenie jest dodatnie dla $0 < r < n - 2k$, ujemne, gdy n jest parzyste i $k = \frac{n}{2}$. Maximum zysku jest przyjmowane dla

$$r_0 = \left[\sqrt{k(n-k) + \frac{1}{4}} - \frac{k+1}{2}\right].$$

Oczekiwany zysk, gdy bukmacher stawia optymalnie, wynosi

$$Z_n = 2\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\frac{n+r_0}{k+r_0} - 1\right) r_0 .$$

Znajdowanie optymalnej strategii bukmachera i obliczanie zysku jest łatwym zadaniem z programowania obliczeń na komputerze. Wstrzymywanie się od gry przy n parzystym i $k = n/2$ podnosi maksymalny zysk bukmachera, jaki może uzyskać ze swego procederu. Wyniesie on teraz 0,3125 przy $n = 4$. Opłacalne powtórzenie stawki pojawia się w grze 7 osób przy $k = 1$. Przy $n = 20$ funkcja $r = r(k)$ ma postać

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(k)$	1	3	4	4	4	4	3	3	2	1	0

Zysk maksymalny nie dąży do zera ze wzrostem n. Pokażemy, że $Z_n \to \frac{1}{4}$, gdy $n \to \infty$.

Prawdopodobieństwa w rozkładzie dwumianowym można przybliżać przy użyciu gęstości normalnego rozkładu prawdopodobieństwa:

$$\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \approx \frac{2}{\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{k - n/2}{\sqrt{n}/2}\right), \quad \text{gdzie} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad n \to \infty.$$

Nie popełnimy znaczących błędów, jeśli ekstremum funkcji $Z = Z_{n,k}(r)$ będziemy szukali nie na zbiorze liczb całkowitych, ale na zbiorze liczb rzeczywistych $r \geq 0$. Wówczas ekstremum jest przyjmowane w punkcie $r_0 = \sqrt{k(n-k)} - k$ i wynosi $\frac{n}{2 - \sqrt{k(n-k)}}$.

Mamy więc (dla n parzystego)

$$Z_n \approx 2\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{n}{2} - \sqrt{k(n-k)}\right) \approx$$

$$\approx 2\sum_{k=0}^{n/2} \frac{2}{\sqrt{n}}\varphi\left(\frac{k-n/2}{\sqrt{n}/2}\right)\frac{(n/2)^2 - k(n-k)}{\frac{n}{2} + \sqrt{k(n-k)}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n/2} \frac{2}{\sqrt{n}}\varphi\left(-\frac{2i}{\sqrt{n}}\right)\left(\frac{2i}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2i}{\sqrt{n}}\right)^2 \frac{1}{n}}} \approx \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(-u)u^2 du = \frac{1}{4}.$$

W trakcie tych obliczeń zmieniliśmy zmienną przy sumowaniu i zastosowaliśmy wzór przybliżony na obliczanie całki.

Do tej pory zakładaliśmy, że grający nie porozumiewają się między sobą, nie zakładają koalicji. Warto zauważyć, że dwóch graczy w koalicji skutecznie może ograć bukmachera, zanim się on zorientuje, że jest oszukiwany. Wystarczy, że będą oni zawsze (dla zmylenia przeciwnika prawie zawsze) stawiali jeden na orła, a drugi na reszkę. Wówczas bukmacher uzyska średnią wygraną $\frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$, a średni zysk będzie miał ujemny $-0,25$.

Popularny totolotek przypomina grę *orzeł czy reszka*, a kioskarz totka jest, oczywiście, bukmacherem. Wyobraźmy więc sobie kioskarza, który przyjmując zakłady notuje obstawione zakłady i, jako ostatni, wypełnia kupon zgodnie z zaleceniami naszej teorii, tzn. typuje najmniej popularny układ. Brzmi to dość rozsądnie, ale rychło każdy z nich przekona się, że upodobania klientów są dość stabilne, związane raczej z kształtem kuponu, i w dodatku dostępne do wiadomości wszystkich. Ujawnił je bowiem profesor Hugon Steinhaus ze współpracownikami w 1960 roku w czasopiśmie *Zastosowania Matematyki*. Ogólny wydźwięk tamtych dociekań jest raczej pesymistyczny – znajomość upodobań klientów totka podnosi oczekiwaną wartość wygranej, ale jest raczej wątpliwe, aby podniosła ją do granicy opłacalności.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

TAJEMNICE BOMBY WODOROWEJ

Polska Agencja Prasowa podała na początku stycznia br. z Londynu sensacyjną (jej zdaniem) wiadomość o wydobyciu tajnych zapisków Hansa Bethego, jednego z fizyków kierujących amerykańskim programem budowy bomby atomowej "Manhattan". Według komunikatu PAP dopiero dzięki tym informacjom można stwierdzić, że twórcą amerykańskiej bomby wodorowej był nie amerykański fizyk Edward Teller, lecz polski matematyk Stanisław Ulam. Sprawa ta wymaga nieco dokładniejszego wyjaśnienia. Znakomity matematyk Stanisław Ulam (1909–1984) urodził się we Lwowie, gdzie ukończył studia i obronił doktorat. II wojna światowa zastała go w Stanach Zjednoczonych, gdzie przebywał w Uniwersytecie Harvardzkim (Cambridge, stan Massachusetts). W 1943 roku zgodził się na podjęcie pracy dla celów wojskowych. W ten sposób trafił do środowiska naukowców zgromadzonych w Los Alamos, tajnym mieście-laboratorium, w którym opracowywano amerykańską bombę atomową. Niezależnie od prac nad bombą A jeszcze w czasie trwania wojny Edward Teller wysunął koncepcję opracowania bomby termojądrowej (wodorowej), nazywanej wówczas Super, złożonej ze zwykłej bomby A, deuteru i trytu. Teller zaproponował konstrukcję Super poprzez zapakowanie materiału do syntezy termojądrowej w płaszcz uranowy tworzący bombę A. Symulacja matematyczna takiej bomby okazała się największym problemem matematycznym owych czasów, znacznie przewyższającym komplikację rachunków astronomicznych. W 1950 roku Ulam (prowadzący obliczenia za pomocą suwaka logarytmicznego) dowiódł, że koncepcja Tellera była błędna. Jeszcze przed rozpoczęciem reakcji syntezy jąder cały materiał zostałby rozrzucony przez falę uderzeniową bomby A. Teller zakwestionował ten rezultat, jednakże obliczenia za pomocą pierwszego na świecie komputera ENIAC (zbudowanego przez von Neumanna) potwierdziły w całej pełni wynik Ulama. Niedługo potem, wiosną 1951 roku, Ulam zaproponował prawidłowe rozwiązanie problemu. Należało odseparować od siebie zapalnik (czyli bombę A) i właściwą bombę H (wodorową). Silna wiązka promieni X, powstających po wybuchu bomby A, doprowadzi do "zapalenia" bomby H przed dotarciem do niej fali uderzeniowej. Ogromne ambicje kierującego całym programem Tellera, jak i konieczność zachowania w ścisłej tajemnicy wyników Ulama, doprowadziły jednak do nazwania Tellera "ojcem bomby H". Jednakże już w latach sześćdziesiątych sprawa ta stała się głośna. Najlepiej podsumował ją sam Bethe – **"Zwykłem mówić, że Ulam był ojcem bomby wodorowej, a Edward (Teller) był jej matką, gdyż nosił dziecko przy sobie przez pewien czas."** Podstawowe założenia koncepcji Ulama zostały ujawnione dopiero przed kilku laty i jeszcze w "Encyklopedii Fizyki Współczesnej" (PWN 1983) można znaleźć schemat bomby H odpowiadający raczej pierwotnej koncepcji Tellera.