Zadania z matematyki nr 201, 202

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

201. Znaleźć maksimum objętości czworościanów mających pięć krawędzi o długości nie większej niż 1.

202. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^2 \quad \text{(przyjmujemy } x_{n+1} = x_1).$$

Zadanie **202** zaproponował pan Andrzej Kondracki z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1989

Przypominamy treść zadań:

193. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów tak, że żaden trójkąt foremny o boku 1 nie ma wszystkich wierzchołków jednakowego koloru.
a) Dowieść, że istnieje trójkąt foremny o boku $\sqrt{3}$ mający wszystkie wierzchołki jednego koloru.
b) Podać przykład pokolorowania o podanej własności.
194. Dowieść, że przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ równanie $x^n + (x+1)^n = y^{2n} + (y+1)^{2n}$ ma tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y.

193. a) Wybierzmy odcinek AB długości 1 o końcach różnych kolorów i zbudujmy trójkąt ABC o bokach AC i BC równej długości 2. Jeden z odcinków AC, BC ma końce różnych kolorów. Możemy przyjąć, że jest to odcinek AC. Niech M będzie jego środkiem. Jeden z odcinków AM, CM ma końce różnych kolorów; przyjmijmy, że jest to odcinek CM (możemy tak uczynić, pod warunkiem, że punkt B w dalszym rozumowaniu już nie wystąpi). Zatem punkty A i M mają ten sam kolor. Niech punkty P i Q, symetryczne względem prostej AC, będą wierzchołkami trójkątów foremnych AMP i AMQ. W myśl założenia zadania punkty te muszą mieć kolor inny niż punkty A i M, a więc taki sam, jak punkt C. Trójkąt CPQ ma wszystkie boki długości $\sqrt{3}$ i wszystkie wierzchołki jednego koloru.
b) Weźmy rodzinę prostych równoległych w równych odstępach $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dzielą one płaszczyznę na pasy. Malujemy te pasy na przemian dwoma kolorami; także linie graniczne malujemy na przemian. Otrzymujemy żądane pokolorowanie.

194. Rozwiązania w liczbach całkowitych sprowadzają się natychmiast do rozwiązań w liczbach naturalnych oraz trywialnych rozwiązań $(0,0)$, $(0,-1)$ i (dla n parzystych) $(-1,0)$, $(-1,-1)$. W dalszym ciągu ograniczymy więc uwagę do $x, y > 0$.
Przyjmijmy oznaczenie: $F_n(t) = t^n + (t+1)^n$.
Równanie przybiera postać
$$(1) \qquad F_n(x) = F_{2n}(y).$$
Wykażemy, że dla ustalonego n i dla dostatecznie dużych y zachodzi nierówność
$$(2) \quad F_n\left(y^2 + y + \frac{n-2}{2}\right) < F_{2n}(y) < F_n\left(y^2 + y + \frac{n-1}{2}\right).$$
Lewą część nierówności (2) otrzymujemy rozwijając dane wyrażenia względem potęg y:
$$(3) \qquad F_n\left(y^2 + y + \tfrac{n-2}{2}\right) =$$
$$= 2y^{2n} + 2ny^{2n-1} + 2n(n-1)y^{2n-2} + (\text{wiel. stopnia} < 2n-2),$$
$$(4) \qquad F_{2n}(y) =$$
$$= 2y^{2n} + 2ny^{2n-1} + n(2n-1)y^{2n-2} + (\text{wiel. stopnia} < 2n-2)$$
(współczynnik przy y^{2n-2} jest większy w (4) niż w (3), a współczynniki przy y^{2n} i y^{2n-1} są równe).
Prawa część nierówności (2) wynika na przykład z tezy zadania **176** (*Delta* 9/1988; rozwiązanie: 1/1989), która w obecnych oznaczeniach ma postać: $F_{2n}(y) < 2\left(y^2 + y + \frac{n}{2}\right)^n$, a liczba $2\left(y^2 + y + \frac{n}{2}\right)^n$ jest mniejsza od prawej strony (2) wobec wypukłości funkcji $t \mapsto t^n$. [Prawą część (2) można też uzasadnić podobnie jak lewą, porównując współczynniki występujących wielomianów; tym razem trzeba zejść aż do y^{2n-4}.]
Tak więc nierówność (2) zachodzi dla dostatecznie dużych y. Pozostaje zauważyć, że jeżeli liczba naturalna y spełnia (2), to nie istnieje liczba naturalna x spełniająca (1): znaczyłoby to bowiem, wobec monotoniczności funkcji F_n, że
$$y^2 + y + \frac{n-2}{2} < x < y^2 + y + \frac{n-1}{2},$$
a taka nierówność nie jest możliwa (wyrazy skrajne są dwiema kolejnymi wielokrotnościami liczby $\frac{1}{2}$).
Uwaga. Nie wiemy, czy istnieje n, dla którego równanie (1) ma – oprócz wymienionych na początku rozwiązań trywialnych – jakiekolwiek inne rozwiązanie.

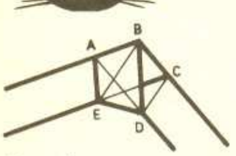
Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 562. Skonstruować punkty przecięcia dwóch paraboli o wspólnej kierownicy k i ogniskach A, B. (J. Olędzki)
Rozwiązanie na str. 14

M 563. Obliczyć $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots$
Rozwiązanie na str. 10

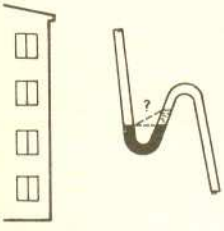
M 564. Uzasadnić znany sposób (rys. 1) otrzymywania pięciokąta foremnego przez wiązanie taśmy papierowej.
Rozwiązanie na str. 14



Rys. 1

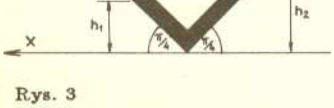
Redaguje dr Lidia GOETTIG

F 282. Wiadomo, że ciśnienie atmosferyczne maleje ze wzrostem wysokości. Tak więc na wyższych piętrach budynku jest ono mniejsze niż na parterze. Co pokaże manometr otwarty, gdy wylot jednego jego ramienia znajdzie się na górnym piętrze, a wylot drugiego na parterze (rys. 2)?
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

F 283. Prosty przyrząd do pomiaru przyspieszenia składa się ze zgiętej rurki otwartej z obu końców i wypełnionej częściowo cieczą (rys. 3). W czasie ruchu przyspieszonego wzdłuż ustalonego kierunku poziomego (na rysunku – kierunek x) powstaje różnica poziomów cieczy. Znaleźć przyspieszenie ruchu, jeśli wysokość cieczy w jednym ramieniu wynosi h_1, a w drugim h_2. Przyjmujemy, że rurka zgięta jest pod kątem prostym i ustawiona jak na rysunku. Zakładamy, że średnica rurki jest dużo mniejsza od h_1 i h_2.
Rozwiązanie na str. 14



Rys. 3