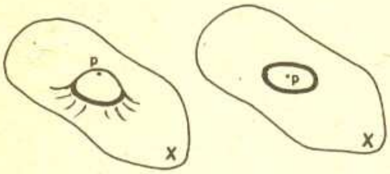
Na przełaj przez matematykę, czyli o błonie mydlanej

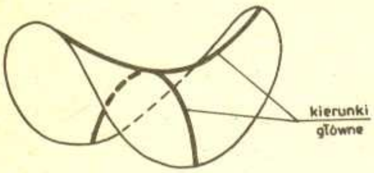
Dr Krzysztof S. NOWIŃSKI

Kształt powierzchni utworzonej przez błonę mydlaną rozpiętą na drucianym konturze jest wyznaczany przez napięcie powierzchniowe minimalizujące pole tej powierzchni. U podstaw zapoczątkowanej w latach 70. zeszłego wieku przez J.A.F. Plateau teorii błony mydlanej leży możliwość łatwego, poglądowego niemal, lokalnego opisu takiej powierzchni minimalnej.



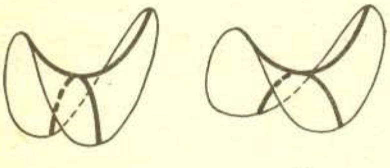
Po spłaszczeniu „garbka" zmniejszyło się pole powierzchni.

Zauważmy mianowicie, że dowolny fragment A powierzchni minimalnej X ograniczony konturem K_A również ma najmniejsze możliwe pole – gdyby tak nie było, moglibyśmy zmniejszyć pole ograniczone przez K_A nie zmieniając nic na zewnątrz tego konturu i w ten sposób zmniejszyć pole całego X wbrew założeniu o jego minimalności. Wynika stąd łatwo, że powierzchnia X nie może zawierać **punktów eliptycznych**, czyli takich, w których otoczeniu X nie przecina płaszczyzny stycznej – taki „dołek" czy „górkę" można spłaszczyć zmniejszając pole.



Pozostają więc tylko punkty, w otoczeniu których powierzchnia nasza przypomina mniej lub bardziej rozpłaszczone siodło. W punkcie takim można wyróżnić dwa prostopadłe **kierunki główne**. Gdy pójdziemy w jednym z tych kierunków nie opuszczając powierzchni X, droga nasza zacznie zakrzywiać się „w górę", gdy pójdziemy w kierunku prostopadłym – zaczniemy schodzić „w dół".

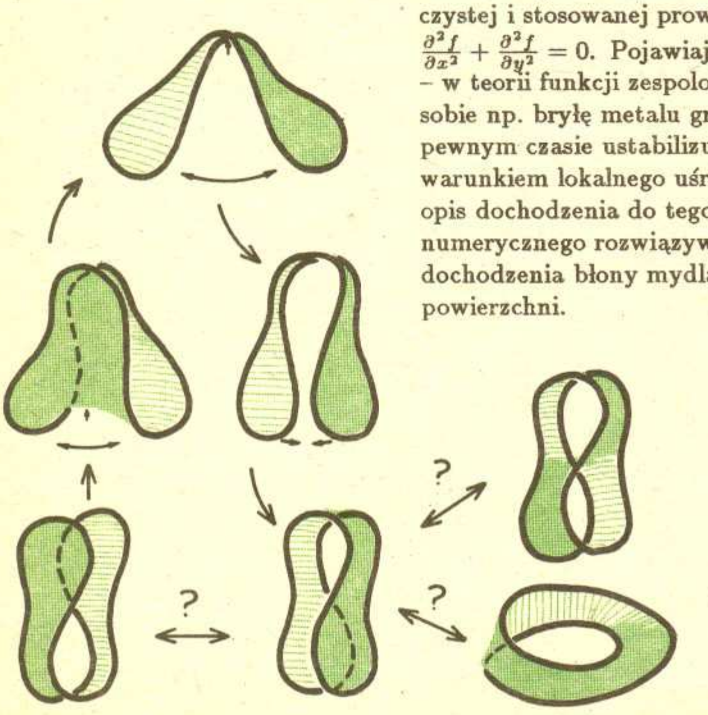
W stosownie wybranym układzie współrzędnych (osiami x, y uczynimy kierunki główne, a osią z kierunek prostopadły do powierzchni) możemy X aproksymować wykresem funkcji $z = f(x,y) = ax^2 - by^2$. Liczby $\frac{a}{2}$ i $-\frac{b}{2}$ nazywamy **krzywiznami głównymi** w punkcie p, a ich sumę $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ – **krzywizną średnią**. Okazuje się, że warunek lokalnej minimalności pola powierzchni pociąga za sobą znikanie krzywizny średniej, czyli $a = b$.



Gdy np. $a > b$, to pole powierzchni siodła przedstawionego na rysunku 1) możemy zmniejszyć deformując je zgodnie z rysunkiem 2).

Zauważmy teraz, że siodło o równych krzywiznach głównych ma pewną ciekawą własność: dla dowolnej liczby ε zbiór punktów oddalonych od „środka" siodła o ε tworzy krzywą, której środkiem ciężkości jest właśnie środek siodła. Wyraźnie widać, że tak nie jest, gdy p jest punktem eliptycznym, a nieco bardziej precyzyjna analiza wykazuje, że równość krzywizn głównych (z przeciwnymi znakami), a więc symetria siodła jest konieczna dla spełnienia wyżej sformułowanego warunku.

Własność „lokalnego uśredniania" pojawia się w wielu zagadnieniach matematyki czystej i stosowanej prowadząc do tzw. eliptycznych równań różniczkowych typu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Pojawiają się one zarówno w rozważaniach natury teoretycznej – w teorii funkcji zespolonych, jak i w problemach praktycznych. Wyobraźmy sobie np. bryłę metalu grzaną z jednej strony, a chłodzoną z drugiej. Po pewnym czasie ustabilizuje się pewien rozkład temperatur opisany właśnie warunkiem lokalnego uśrednienia, a więc i równaniem eliptycznym. Również opis dochodzenia do tego stanu stabilnego, dający w wyniku pewien algorytm numerycznego rozwiązywania równań eliptycznych, ma swą analogię w opisie dochodzenia błony mydlanej do stanu równowagi, tzn. stanu minimalizacji pola powierzchni.



Problem powierzchni minimalnych kryje w sobie nietrywialne pytania topologiczne. Okazuje się na przykład, że deformując w sposób ciągły pewien kontur tak, że po zakończeniu deformacji wróci on do postaci pierwotnej, możemy otrzymać „nieodwracalną" deformację błony mydlanej, a pewne kształty konturu dają wysoce nietrywialne formy powierzchni minimalnych. Podobne rozważania w przypadku wielowymiarowym prowadzą do nie rozwiązanych problemów z najtrudniejszych działów topologii, analizy globalnej i kombinatoryki.