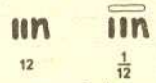
mała delta

Nazywają się proste

System rachunkowy starożytnych Egipcjan (np. 1 500 lat p.n.e.) używał tylko liczb naturalnych i ich odwrotności. Zapisywano to bardzo prosto – jeśli jakiś hieroglif oznaczał liczbę naturalną, to oznaczenie jej odwrotności uzyskiwano przez dorysowanie (zawsze takiego samego) stosownego znaczka.



Nie było natomiast znaczków na oznaczenie innych ułamków (w późniejszych tekstach pojawia się oddzielny znaczek na $\frac{2}{3}$, ale tylko on).

Jak więc radzono sobie z innymi ułamkami? Bo przecież poziom zadań rachunkowych, jakie wówczas rozwiązywano, wymagał użycia i innych ułamków. Otóż uważano, że wystarczy zajmować się sumami liczb naturalnych i pewnej liczby ich odwrotności.

A czy rzeczywiście wystarczy? Dokładniej – czy każdy ułamek między 0 a 1 da się przedstawić jako suma odwrotności różnych (bo tego Egipcjanie wymagali) liczb naturalnych?

Dziś przedstawienie ułamka właściwego jako sumy odwrotności różnych liczb naturalnych nazywa się rozkładem na ułamki proste. Czy zatem każdy ułamek właściwy da się rozłożyć na ułamki proste? Zamieszczona tabelka podaje takie rozkłady dla (dzisiejszych) ułamków o mianownikach od 2 do 7. Proponuję Czytelnikom przedłużenie jej. Bo da się to zrobić dowolnie daleko.

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{15} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{10} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{7} \qquad \frac{1}{4}+\frac{1}{28} \qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{14} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{70} \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}$$

Zauważmy najpierw, że rozkład na ułamki proste nie jest jednoznaczny. Istotnie, np.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{24}.$$

Każdy widzi, jaką sztuczkę należy tu zastosować, np.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

Ale zastanówmy się, jak w ogóle jakiś rozkład otrzymać. Odpowiedź jest prosta. Od ułamka, który chcemy rozłożyć, odejmujemy największy, spośród mniejszych od niego, ułamek prosty. I kontynuujemy tę operację, aż reszta też będzie ułamkiem prostym. Np.

$$\frac{9}{19}-\frac{1}{3}=\frac{27-19}{57}=\frac{8}{57},$$

$$\frac{8}{57}-\frac{1}{8}=\frac{64-57}{456}=\frac{7}{456},$$

$$\frac{7}{456}-\frac{1}{66}=\frac{462-456}{30\,096}=\frac{6}{30\,096}=\frac{1}{10\,016},$$

czyli $\frac{9}{19}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{66}+\frac{1}{10\,016}$.

Aby przekonać się, że takie postępowanie zawsze zakończy się sukcesem, wystarczy zauważyć, iż ułamki otrzymane po każdym takim odejmowaniu muszą mieć coraz mniejsze liczniki (a dlaczego?). Tak więc $\frac{a}{n}$ jest sumą co najwyżej a różnych ułamków prostych.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS

P.S. O tym, że rozkłady na ułamki proste (już niekoniecznie różne) mogą być przedmiotem bardzo twardej matematyki, świadczą np. następujące, do tej pory nie rozwiązane, problemy:

Czy każdy ułamek $\frac{4}{n}$, dla $n > 1$, da się przedstawić jako suma dokładnie trzech ułamków prostych?
(problem Erdösa)

Czy dla każdego a każdy ułamek $\frac{a}{n}$ o mianowniku większym od pewnej, dobranej do a, liczby n_a jest sumą dokładnie trzech ułamków prostych?
(problem Schinzla)