Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 83 (WT=2,40), 84 (WT=3,00), 85 (WT=1,87) i 86 (WT=2,14) z numerów 2/1989 oraz 3/1989

Wiesław Kacprzak	– Kraków	46,47pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	44,15pkt
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	42,44pkt
Tomasz Wietecha	– Tarnów	40,99pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	39,57pkt
Aleksander Surma	– Myszków	38,73pkt
Wojciech Peisert	– Wrocław	29,38pkt
Piotr Bała	– Toruń	29,21pkt
Mariusz Bogacz	– Pińczów	28,86pkt
Przemysław Gworys	– Częstochowa	28,62pkt

Pan Kacprzak staje się piętnastym członkiem, a pan Lipniacki drugim weteranem Klubu **44F**.

Zadania z fizyki nr 99, 100

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

99. Między dwoma punktami o ustalonej różnicy wysokości i odległości poziomej budujemy tor bobslejowy. Podać – jakościowo – kształty toru, dla których osiągane byłyby:
a) maksymalna prędkość końcowa,
b) maksymalna prędkość średnia,
c) minimalny czas przejazdu.

100. Oszacować maksymalny możliwy zasięg samolotu odrzutowego, lecącego z prędkością 800 km/h, na podstawie następujących danych:
– stosunek siły nośnej (wytwarzanej przez skrzydła) do siły oporu powietrza – 5,
– energia spalania paliwa – $4 \cdot 10^7$ J/kg,
– stosunek masy powietrza do masy paliwa w wyrzucanych gazach spalinowych – 50.
Inne, niezbędne dane należy przyjąć samemu.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1989

Przypominamy treść zadań:

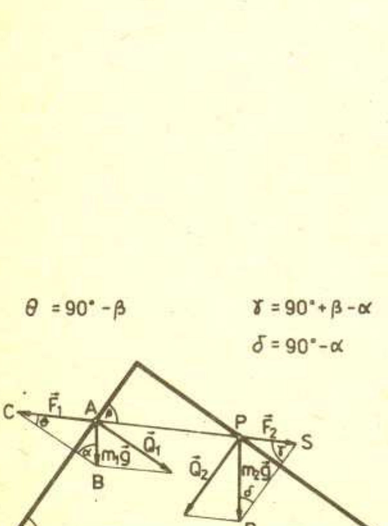
91. Gdy poziomo rozpiętą nylonową żyłkę – używaną do suszenia bielizny – pociągamy (pocieramy) wzdłuż zwilżonymi palcami, słyszymy charakterystyczny dźwięk. Jeśli na żyłce wiszą jakieś drobne, suche „szmatki" możemy jednocześnie zauważyć, że przemieszczają się one wzdłuż żyłki w tym samym kierunku, w którym przesuwamy po niej palce. Wytłumaczyć to zjawisko, w miarę możliwości ilustrując własnym materiałem doświadczalnym.

92. Dwa ciała, o masach odpowiednio m_1 i m_2, połączone nieważką nicią, mogą się poruszać bez tarcia po prostopadłych względem siebie prowadnicach ustawionych w płaszczyźnie pionowej tak, że jedna z nich nachylona jest pod kątem α względem poziomu (rysunek). Znaleźć kąt między nicią łączącą ciała a tą prowadnicą, gdy układ ciał znajduje się w stanie równowagi. Określić, jaki to rodzaj równowagi.

91. Podczas pociągania elastycznej żyłki palcami występuje kilka faz ruchu. Początkowo nie ma poślizgu między palcami a żyłką i następuje wydłużanie żyłki (faza A). W chwili, gdy siła sprężystości żyłki przewyższy siłę tarcia statycznego, następuje szybki ruch powrotny kurczącej się żyłki (faza B). Gdy w pewnym momencie siła sprężystości żyłki w punkcie jej styku z palcami zrówna się z siłą tarcia statycznego (co może być spowodowane drgającym ruchem żyłki w przeciwnym od pierwotnego kierunku lub też fluktuacjami siły palców ściskających żyłkę), zacznie się ponownie faza A. Jeśli fazy A i B następują po sobie z odpowiednio dużą częstotliwością, generowany jest charakterystyczny dźwięk. Przesuwanie się przedmiotów zawieszonych na żyłce można wytłumaczyć poślizgiem występującym między tymi przedmiotami a żyłką w fazie B (siła tarcia za mała, aby nadać tym przedmiotom odpowiednie przyspieszenie) i brakiem poślizgu w fazie A.

$\theta = 90° - \beta$ $\qquad$ $\gamma = 90° + \beta - \alpha$

$\delta = 90° - \alpha$



92. Siły ciężkości $m_1\mathbf{g}$ i $m_2\mathbf{g}$ rozkładamy na składowe $\mathbf{\Omega}_1$ i $\mathbf{\Omega}_2$ prostopadłe do odpowiednich prętów oraz na składowe $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ działające wzdłuż nici łączącej obie masy – jak na rysunku. Siły $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ muszą się równoważyć, wobec czego

$$|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| = F.$$

Korzystając z twierdzenia Snelliusa dla trójkątów ABC oraz RST otrzymujemy

$$F = m_1 g \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \quad \text{oraz} \quad F = m_2 g \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}.$$

Stąd znajdujemy

$$\mathrm{tg}\,\beta = (m_2/m_1)\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Zadania z matematyki nr 201, 202

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

201. Znaleźć maksimum objętości czworościanów mających pięć krawędzi o długości nie większej niż 1.

202. Dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{x_{k+1}} \right)^2 \quad \text{(przyjmujemy } x_{n+1} = x_1\text{)}.$$

Zadanie **202** zaproponował pan Andrzej Kondracki z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1989

Przypominamy treść zadań:

193. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano jednym z dwóch kolorów tak, że żaden trójkąt foremny o boku 1 nie ma wszystkich wierzchołków jednakowego koloru.
a) Dowieść, że istnieje trójkąt foremny o boku $\sqrt{3}$ mający wszystkie wierzchołki jednego koloru.
b) Podać przykład pokolorowania o podanej własności.
194. Dowieść, że przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$ $(n \ge 2)$ równanie $x^n + (x+1)^n = y^{2n} + (y+1)^{2n}$ ma tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y.

193. a) Wybierzmy odcinek AB długości 1 o końcach różnych kolorów i zbudujmy trójkąt ABC o bokach AC i BC równej długości 2. Jeden z odcinków AC, BC ma końce różnych kolorów. Możemy przyjąć, że jest to odcinek AC. Niech M będzie jego środkiem. Jeden z odcinków AM, CM ma końce różnych kolorów; przyjmijmy, że jest to odcinek CM (możemy tak uczynić, pod warunkiem, że punkt B w dalszym rozumowaniu już nie wystąpi). Zatem punkty A i M mają ten sam kolor. Niech punkty P i Q, symetryczne względem prostej AC, będą wierzchołkami trójkątów foremnych AMP i AMQ. W myśl założenia zadania punkty te muszą mieć kolor inny niż punkty A i M, a więc taki sam, jak punkt C. Trójkąt CPQ ma wszystkie boki długości $\sqrt{3}$ i wszystkie wierzchołki jednego koloru.
b) Weźmy rodzinę prostych równoległych w równych odstępach $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dzielą one płaszczyznę na pasy. Malujemy te pasy na przemian dwoma kolorami; także linie graniczne malujemy na przemian. Otrzymujemy żądane pokolorowanie.

194. Rozwiązania w liczbach całkowitych sprowadzają się natychmiast do rozwiązań w liczbach naturalnych oraz trywialnych rozwiązań $(0,0)$, $(0,-1)$ i (dla n parzystych) $(-1,0)$, $(-1,-1)$. W dalszym ciągu ograniczymy więc uwagę do $x, y > 0$.
Przyjmijmy oznaczenie: $F_n(t) = t^n + (t+1)^n$.
Równanie przybiera postać

$$(1) \qquad F_n(x) = F_{2n}(y).$$

Wykażemy, że dla ustalonego n i dla dostatecznie dużych y zachodzi nierówność

$$(2) \quad F_n\left(y^2 + y + \frac{n-2}{2}\right) < F_{2n}(y) < F_n\left(y^2 + y + \frac{n-1}{2}\right).$$

Lewą część nierówności (2) otrzymujemy rozwijając dane wyrażenia względem potęg y:

$$(3) \qquad F_n\left(y^2 + y + \tfrac{n-2}{2}\right) =$$
$$= 2y^{2n} + 2ny^{2n-1} + 2n(n-1)y^{2n-2} + (\text{wiel. stopnia} < 2n-2),$$
$$(4) \qquad F_{2n}(y) =$$
$$= 2y^{2n} + 2ny^{2n-1} + n(2n-1)y^{2n-2} + (\text{wiel. stopnia} < 2n-2)$$

(współczynnik przy y^{2n-2} jest większy w (4) niż w (3), a współczynniki przy y^{2n} i y^{2n-1} są równe).
Prawa część nierówności (2) wynika na przykład z tezy zadania **176** (*Delta* 9/1988; rozwiązanie: 1/1989), która w obecnych oznaczeniach ma postać: $F_{2n}(y) < 2\left(y^2 + y + \frac{n}{2}\right)^n$, a liczba $2\left(y^2 + y + \frac{n}{2}\right)^n$ jest mniejsza od prawej strony (2) wobec wypukłości funkcji $t \mapsto t^n$. [Prawą część (2) można też uzasadnić podobnie jak lewą, porównując współczynniki występujących wielomianów; tym razem trzeba zejść aż do y^{2n-4}.]
Tak więc nierówność (2) zachodzi dla dostatecznie dużych y. Pozostaje zauważyć, że jeżeli liczba naturalna y spełnia (2), to nie istnieje liczba naturalna x spełniająca (1): znaczyłoby to bowiem, wobec monotoniczności funkcji F_n, że

$$y^2 + y + \frac{n-2}{2} < x < y^2 + y + \frac{n-1}{2},$$

a taka nierówność nie jest możliwa (wyrazy skrajne są dwiema kolejnymi wielokrotnościami liczby $\frac{1}{2}$).
Uwaga. Nie wiemy, czy istnieje n, dla którego równanie (1) ma – oprócz wymienionych na początku rozwiązań trywialnych – jakiekolwiek inne rozwiązanie.

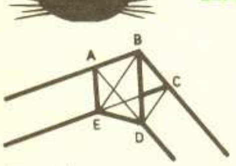
Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 562. Skonstruować punkty przecięcia dwóch paraboli o wspólnej kierownicy k i ogniskach A, B. (J. Olędzki)
Rozwiązanie na str. 14

M 563. Obliczyć $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \ldots$
Rozwiązanie na str. 10

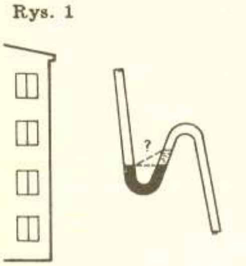
M 564. Uzasadnić znany sposób (rys. 1) otrzymywania pięciokąta foremnego przez wiązanie taśmy papierowej.
Rozwiązanie na str. 14



Rys. 1

Redaguje dr Lidia GOETTIG

F 282. Wiadomo, że ciśnienie atmosferyczne maleje ze wzrostem wysokości. Tak więc na wyższych piętrach budynku jest ono mniejsze niż na parterze. Co pokaże manometr otwarty, gdy wylot jednego jego ramienia znajdzie się na górnym piętrze, a wylot drugiego na parterze (rys. 2)?
Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

F 283. Prosty przyrząd do pomiaru przyspieszenia składa się ze zgiętej rurki otwartej z obu końców i wypełnionej częściowo cieczą (rys. 3). W czasie ruchu przyspieszonego wzdłuż ustalonego kierunku poziomego (na rysunku – kierunek x) powstaje różnica poziomów cieczy. Znaleźć przyspieszenie ruchu, jeśli wysokość cieczy w jednym ramieniu wynosi h_1, a w drugim h_2. Przyjmujemy, że rurka zgięta jest pod kątem prostym i ustawiona jak na rysunku. Zakładamy, że średnica rurki jest dużo mniejsza od h_1 i h_2.
Rozwiązanie na str. 14

Rys. 3