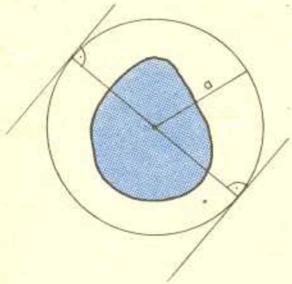
Figury wypukłe a koła

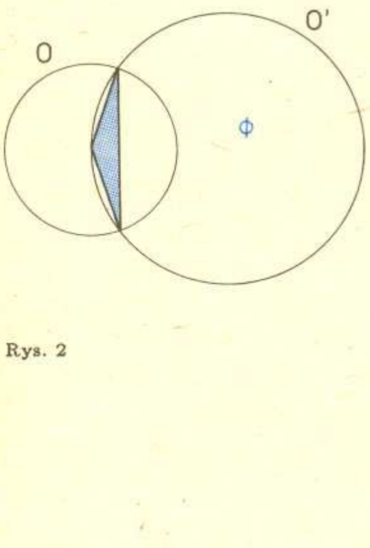
Mgr Jarosław GÓRNICKI

W całym artykule jest mowa wyłącznie o figurach płaskich (czyli podzbiorach płaszczyzny euklidesowej).

Figurę nazywamy wypukłą, gdy każde dwa jej punkty można połączyć odcinkiem zawartym w tej figurze.



Rys. 1



Rys. 2

Z figurą wypukłą i ograniczoną można związać dwie liczby – jej średnicę i szerokość.

Średnicą figury nazywamy kres górny odległości jej punktów.

Szerokością figury nazywamy kres dolny szerokości pasów zawierających tę figurę (pas to obszar zawarty między dwiema prostymi równoległymi, a jego szerokość to odległość tych prostych).

Aby używać tych pojęć, trzeba wykazać, że oba te kresy istnieją. Wynika to jednak wprost z własności liczb rzeczywistych (odległość to przecież liczba rzeczywista) mówiącej, że ograniczony zbiór liczb rzeczywistych ma zarówno kres dolny, jak i górny. Figura jest ograniczona, gdy zawiera się w pewnym kole – niech jego promień będzie a. Wówczas odległości jej punktów nie przekraczają $2a$ – stąd mają kres górny. Dla oznaczenia średnicy figury używać będziemy litery D.

Łatwo też wskazać pas zawierający figurę, mający szerokość $2a$. Możemy zatem rozważać tylko pasy o szerokości nie większej niż $2a$. I znów w (ograniczonym – z dołu przez 0) zbiorze ich szerokości istnieje kres dolny. Dla oznaczenia szerokości figury używać będziemy litery d.

Na przykład średnicą prostokąta jest długość jego przekątnej, a szerokością – długość krótszego boku. Średnicą trójkąta jest długość najdłuższego boku, a szerokością – długość najkrótszej wysokości. Średnicą odcinka jest jego długość, a szerokość jest równa 0. Średnica i szerokość koła to jego (wzięta z elementarnej geometrii) średnica (czyli dwa promienie).

Inne liczby związane z figurą domkniętą i ograniczoną to promienie koła opisanego i wpisanego w figurę.

Tu potrzebne jest od razu zastrzeżenie. Wiemy przecież dobrze, że w prostokąt różny od kwadratu nie można wpisać koła. Podobnie, gdy romb nie jest kwadratem, nie można na nim koła opisać. Wynika stąd, że używać tu będziemy (tak robi się w teorii figur wypukłych) innych pojęć koła opisanego i wpisanego niż te, których używa się w szkole. Zacznijmy od określenia interesujących nas liczb – promieni.

Promieniem koła opisanego na figurze nazywamy kres dolny promieni kół domkniętych zawierających tę figurę.

Promieniem koła wpisanego w figurę nazywamy kres górny promieni kół otwartych (bez brzegu) zawartych w tej figurze.

Dowód istnienia tych liczb dla dowolnej figury wypukłej i ograniczonej jest analogiczny do dowodu istnienia jej średnicy i szerokości. Dla oznaczenia tych promieni będziemy używali, odpowiednio, liter R i r.

Czytelnik bez trudu znajdzie R i r dla kilku figur. Zauważmy, że nawet dla tych figur, dla których istnieje koło opisane i wpisane w klasycznym (szkolnym) sensie, określone tu promienie mogą być inne od uzyskanych w klasyczny sposób. Np. dla trójkątów rozwartokątnych R jest mniejsze od promienia koła opisanego na trójkącie w klasycznym sensie.

Związek między liczbami D, d, R, r podaje

Twierdzenie. Dla każdej figury ϕ wypukłej i ograniczonej, mamy

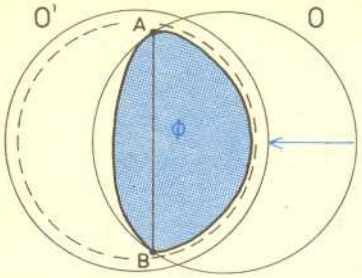
a) $$\frac{D}{2} \leq R \leq \frac{D}{\sqrt{3}},$$

b) $$\frac{d}{3} \leq r \leq \frac{d}{2}$$

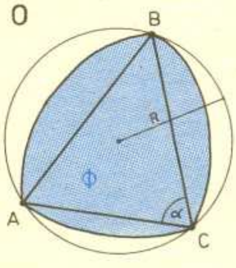
i żadne z tych oszacowań nie może być poprawione.

To, że oszacowania poprawione być nie mogą, wskazują (kolejno) przykłady prostokąta o średnicy D, trójkąta równobocznego o boku długości D, znów trójkąta równobocznego o wysokości d i prostokąta o szerokości d.

Z wcześniejszych rozważań wiemy, że dla każdej figury wypukłej i ograniczonej istnieje koło domknięte (odpowiednio – otwarte) zawierające tę figurę (zawarte w tej figurze) i mające promień R (odpowiednio – r). Nazywamy to koło opisanym (wpisanym).



Rys. 3



Rys. 4

Można udowodnić obie nierówności nie przechodząc „po drodze" przez ten fakt – dowód jest wtedy bardziej skomplikowany technicznie.

Brzeg koła opisanego musi spełniać jeden z warunków:

(1) należą do niego dwa punkty brzegowe figury ϕ leżące na przeciwległych końcach średnicy,

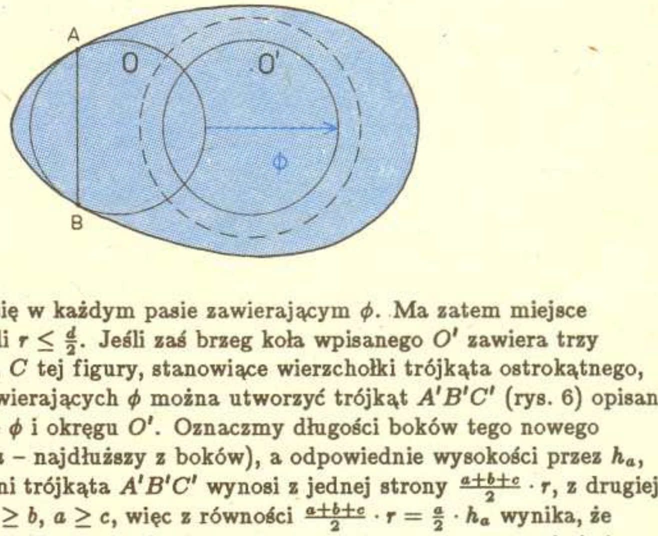
(2) należą do niego trzy punkty brzegowe figury ϕ położone w wierzchołkach trójkąta ostrokątnego.

Załóżmy bowiem, że koło o brzegu O zawiera figurę ϕ i nie spełnia powyższych warunków. Zatem istnieje łuk AB okręgu O o rozwartości mniejszej niż π zawierający część wspólną O i ϕ (ta część wspólna może być pusta, jednopunktowa, ...). Możemy więc przesunąć równolegle okrąg O w kierunku prostopadłym do cięciwy AB i znaleźć koło o mniejszym promieniu zawierające ϕ (rys. 3).

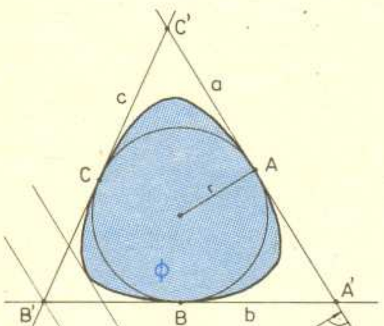
Z warunków (1) i (2) wynikają oszacowania podane w twierdzeniu. Ponieważ figura ϕ jest zawarta w kole o promieniu R, więc $2R \geq D$, czyli $R \geq \frac{D}{2}$. Jeżeli teraz okrąg O zawiera trzy punkty figury będące wierzchołkami trójkąta ostrokątnego ABC (rys. 4), to co najmniej jeden z kątów ma miarę nie mniejszą niż $\frac{\pi}{3}$. Sinus tego kąta α jest nie mniejszy niż $\frac{\sqrt{3}}{2}$, bok trójkąta leżący naprzeciw tego kąta jest nie większy niż D, więc na podstawie twierdzenia sinusów mamy

$$2R = \frac{|AB|}{\sin\alpha} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}D, \text{ czyli } R \leq \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

W przypadku nierówności b) postępujemy podobnie. Brzeg koła wpisanego zawiera dwa punkty brzegowe figury ϕ położone na końcach średnicy lub trzy punkty brzegowe figury ϕ stanowiące wierzchołki trójkąta ostrokątnego (rys. 5).



Rys. 5



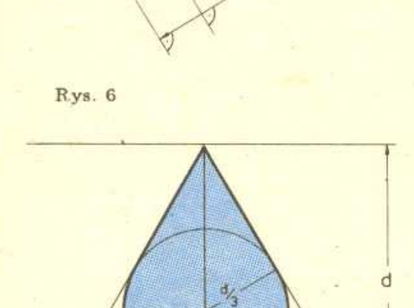
Rys. 6

Koło wpisane zawiera się w każdym pasie zawierającym ϕ. Ma zatem miejsce nierówność $2r \leq d$, czyli $r \leq \frac{d}{2}$. Jeśli zaś brzeg koła wpisanego O' zawiera trzy punkty brzegowe A, B, C tej figury, stanowiące wierzchołki trójkąta ostrokątnego, to z brzegów pasów zawierających ϕ można utworzyć trójkąt $A'B'C'$ (rys. 6) opisany jednocześnie na figurze ϕ i okręgu O'. Oznaczmy długości boków tego nowego trójkąta przez a, b, c (a – najdłuższy z boków), a odpowiednie wysokości przez h_a, h_b, h_c. Pole powierzchni trójkąta $A'B'C'$ wynosi z jednej strony $\frac{a+b+c}{2} \cdot r$, z drugiej zaś $\frac{a}{2} \cdot h_a$. Ponieważ $a \geq b$, $a \geq c$, więc z równości $\frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{a}{2} \cdot h_a$ wynika, że $h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \cdot r \leq 3r$, więc $r \geq \frac{1}{3} \cdot h_a$. Ponieważ wysokość trójkąta $A'B'C'$ jest nie mniejsza niż szerokość figury ϕ, tzn. $h_a \geq d$, więc $r \geq \frac{d}{3}$.

Z udowodnionego twierdzenia wynikają dwa ważne fakty.

Wniosek 1 (H.W.E. Jung). Każdą figurę o średnicy D można zawrzeć w kole o promieniu $\frac{D}{\sqrt{3}}$.
(Inny dowód tego faktu podany jest w *Delcie* 3/1985.)

Wniosek 2 (W. Blaschke, 1914). Każda figura wypukła o szerokości d zawiera koło o promieniu $\frac{d}{3}$.



Rys. 7

Z rezultatem Blaschkego wiąże się nie rozwiązane dotychczas zagadnienie:
znaleźć figurę o największym polu, którą można umieścić wewnątrz każdej figury wypukłej o szerokości d.
Uzyskane wyniki gwarantują jedynie istnienie takiej figury, ale nie mówią nic o jej kształcie. Oto propozycja: wewnątrz każdej figury wypukłej o szerokości d można umieścić zakreskowaną figurę z rysunku 7; jej pole wynosi

$$\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{27} d^2 \approx 0,4251 \cdot d^2.$$

Może Czytelnik znajdzie kontrprzykład lub wskaże lepszą kontynuację.