O charakterystyce Eulera

Mgr Danuta CIESIELSKA, mgr Sławomir CYNK

Ze wzorem Eulera spotykamy się już w szkole średniej. Mówi on, że w wielościanie wypukłym suma liczby wierzchołków i liczby ścian jest równa liczbie krawędzi powiększonej o dwa. W szkole wykorzystany został do dowodu istnienia dokładnie pięciu wielościanów foremnych. Niestety, w podręczniku szkolnym wzór Eulera udowodniony nie jest.

Zacznijmy od uzupełnienia tej „drobnej" luki – wykażmy prawdziwość wzoru Eulera dla wielościanów wypukłych. Zanim to jednak uczynimy, wprowadzimy kilka definicji i oznaczeń.

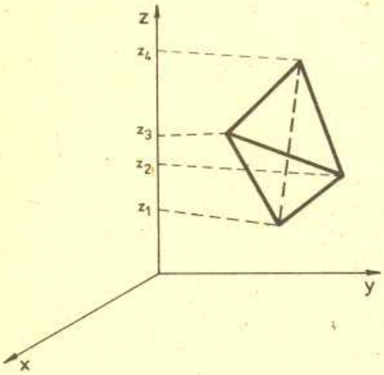
Definicja. Wielościanem wypukłym nazywamy ograniczoną część wspólną skończenie wielu półprzestrzeni.

Oznaczenia. Przez W oznaczmy liczbę wierzchołków wielościanu wypukłego, przez K – liczbę krawędzi, przez S – liczbę ścian tego wielościanu.

Wzór Eulera przyjmuje teraz postać następującą:

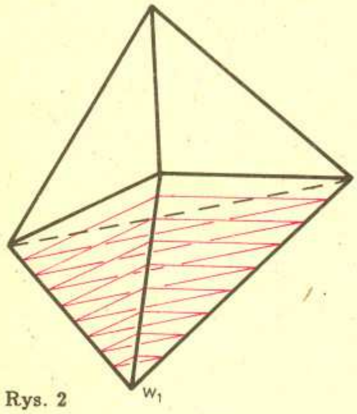
Twierdzenie. Jeżeli P jest wielościanem wypukłym, to zachodzi wzór

$$W - K + S = 2 .$$



Rys. 1

Dowód: Wiemy, że wielościan P ma W wierzchołków. Umieśćmy wielościan w przestrzeni tak, by każdy z wierzchołków znalazł się na innej wysokości (tzn. jeśli wierzchołek $w_i = (x_i, y_i, z_i)$, to $z_i \neq z_j$ dla $i \neq j$). Możliwość takiego ułożenia wielościanu wydaje się oczywista. Dowód tego faktu Czytelnik może z satysfakcją dla siebie przeprowadzić. Załóżmy więc, że wielościan jest ułożony tak, jak opisaliśmy to przed chwilą; aby uprościć zapis rozumowania, przyjmijmy, że wierzchołek w_1 jest najniżej, wierzchołek w_2 następny itd., aż do najwyższego wierzchołka, czyli w_W (inaczej mówiąc – zachodzi następujący ciąg nierówności: $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_W$).



Rys. 2

Wybierzmy jeden z wierzchołków i zbadajmy te spośród krawędzi i ścian wielościanu, które wychodzą z tego wierzchołka „w górę". Oznaczmy przez k_i $(i = 1, \ldots, W)$ liczbę krawędzi, a przez s_i $(i = 1, \ldots, W)$ liczbę ścian, dla których wierzchołek w_i jest najniższym punktem. Wtedy, oczywiście, $k_W = s_W = 0$, bo od wierzchołka w_W nic nie wznosi się ku górze. Zauważmy również, że

$$k_1 = s_1 , \quad \text{czyli} \quad s_1 - k_1 = 0$$

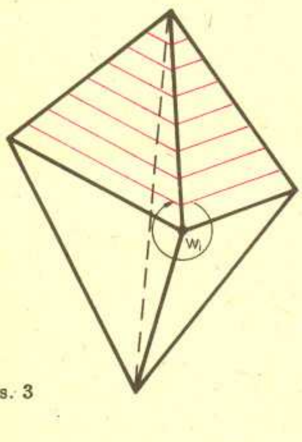
(z pierwszego wierzchołka tyle samo krawędzi i ścian „idzie w górę").

Podobna własność dla pozostałych wierzchołków nie jest aż tak oczywista. Z każdego spośród wierzchołków $w_2, \ldots, w_{W-1}$ przynajmniej jedna krawędź i tym samym co najmniej dwie ściany „idą w dół od niego". Przyjrzyjmy się całemu narożu o wierzchołku w_i $(i \geq 2)$. Obejdźmy je zgodnie z ruchem wskazówek zegara; w podróży tej możemy dokonać następujących ciekawych obserwacji:

Jeśli dwie ściany mają wspólny wierzchołek, to albo mają także wspólną krawędź, albo nie mają żadnych innych punktów wspólnych.

Ściana „idzie w górę" od wierzchołka w_i wtedy i tylko wtedy, gdy obie jej krawędzie schodzące się w tym wierzchołku „idą w górę" od niego.

Ściany „idące w górę" od wierzchołka w_i tworzą „wachlarz", tzn. mają one wspólny wierzchołek w_i oraz dają się ustawić w ciąg taki, że każde dwie kolejne ściany mają wspólną krawędź (na rysunku 3 „wachlarzem" jest zbiór kolorowy).



Rys. 3

Teraz już bez problemu zauważymy, że

$$k_i - s_i = 1 \quad \text{dla} \quad i = 2, \ldots, W - 1$$

(liczba krawędzi w „wachlarzu" jest o jeden większa niż liczba ścian).

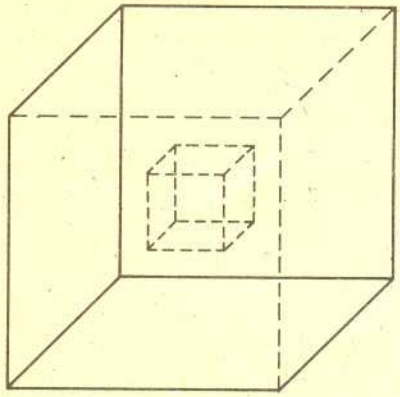
Dla otrzymania ostatecznego wyniku, czyli wzoru Eulera, wystarczy przeprowadzić małą buchalterię. Każda ściana ma najniższy wierzchołek, zatem $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_W$ oraz każda krawędź ma najniższy wierzchołek, czyli $K = k_1 + k_2 + \ldots + k_W$. Odejmując te równania stronami otrzymujemy równość

$$K - S = \sum_{i=1}^{W} (k_i - s_i) = \sum_{i=2}^{W-1} 1 = W - 2 .$$

Wobec czego $W - K + S = W - (K - S) = W - (W - 2) = 2$.

Tym samym wykazaliśmy wzór Eulera dla wielościanów wypukłych. Dowód ten różni się od dowodu podanego przez Leonharda Eulera. Co ciekawsze, oryginalny dowód Eulera nie był w pełni poprawny! Zainteresowanych historią wzoru Eulera odsyłamy do artykułu Z.T. Pogody „Historia wzoru Eulera dla wielościanów" (*Matematyka* 1/1989).

Do tej pory badaliśmy wzór Eulera jedynie w przypadku wielościanów wypukłych. Niemniej jednak wyrażenie stojące po lewej stronie wzoru ma sens dla każdej figury geometrycznej, która jest sumą mnogościową skończonej liczby punktów, odcinków i wielokątów wypukłych. Figurę, dla której opisane rozbicie istnieje, będziemy nazywać wielościanem. Jednak nie warto rozpatrywać wszystkich rozbić wielościanu na sumę: np. okazuje się, że traktowanie brzegu sześcianu jako sumy sześciu kwadratów nie jest sensowne. Będziemy mówić, że rozbicie figury na punkty, odcinki i wielokąty wypukłe jest dopuszczalne, gdy:



Rys. 4

1° Wraz z każdym wielokątem z rozbicia do zbioru odcinków należą wszystkie krawędzie tego wielokąta, a wraz z każdym odcinkiem do zbioru punktów należą jego końce.

2° Dowolne dwa różne elementy rozbicia mają wspólny co najwyżej kawałek brzegu jednego z elementów (brzegiem odcinka są jego końce), przy czym wtedy ta część wspólna jest też elementem rozbicia.

Dla dowolnego wielościanu A liczbę $\chi(A) = W - K + S$ nazwijmy jego charakterystyką Eulera.

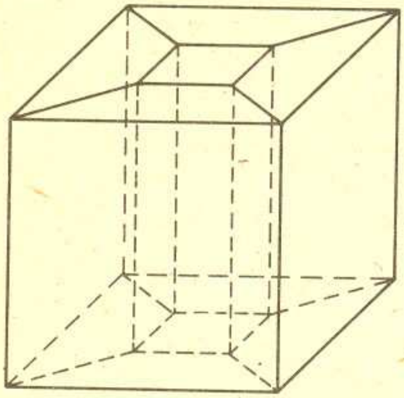
Dla lepszego zilustrowania wprowadzonych określeń obliczmy charakterystykę Eulera najprostszych wielościanów:

a) Zbiór jednopunktowy. Ponieważ w tym przypadku $W = 1$, $K = 0$, $S = 0$, więc $\chi = 1$.

b) Odcinek. Tym razem $W = 2$, $K = 1$, $S = 0$, a zatem, podobnie jak poprzednio $\chi = 1$.

c) Łamana zwyczajna otwarta. Jeśli przez n oznaczymy liczbę odcinków, z których jest ona zbudowana, to otrzymamy $W = n + 1$, $K = n$, $S = 0$, czyli znowu $\chi = 1$.

d) Łamana zwyczajna zamknięta. Podobnie jak poprzednio oznaczmy przez n liczbę odcinków, z których jest ona zbudowana. Tym razem jednak otrzymamy $W = n$, $K = n$, $S = 0$ i w konsekwencji $\chi = 0$.



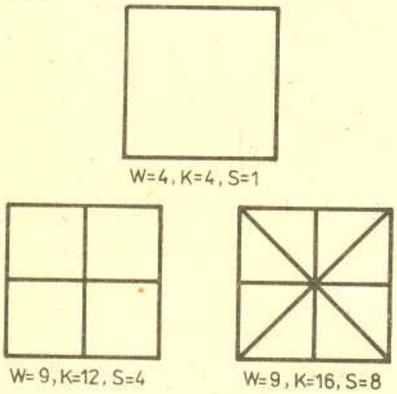
Rys. 5

e) Wypukły n-kąt. Ponieważ $W = n$, $K = n$, $S = 1$, więc raz jeszcze otrzymujemy $\chi = 1$.

f) Powierzchnia wielościanu wypukłego. Ten przykład mamy już obliczony. Wystarczy bowiem rzut oka na wzór Eulera, aby stwierdzić, że w tym przypadku $\chi = 2$.

g) Powierzchnia bryły powstałej przez wydrążenie we wnętrzu sześcianu dziury w kształcie drugiego, malutkiego sześcianu (rys. 4). Jak łatwo sprawdzić, w tym przypadku $W = 16$, $K = 24$, $S = 12$, a zatem $\chi = 4$.

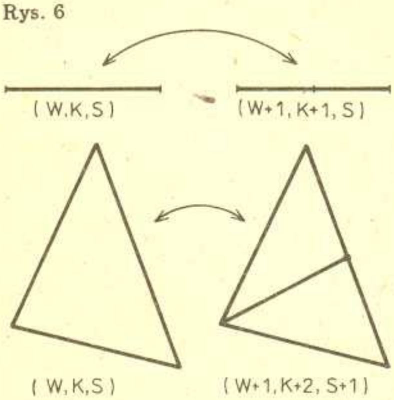
h) Powierzchnia bryły powstałej przez wywiercenie w sześcianie otworu „na wylot" (rys. 5). Tym razem $W = 16$, $K = 32$, $S = 16$ i w efekcie $\chi = 0$.



Rys. 6

W podobny sposób możemy obliczyć charakterystykę Eulera coraz bardziej skomplikowanych wielościanów. Natychmiast jednak nasuwa się wątpliwość. Czy wartość $W - K + S$ nie zależy od sposobu rozbicia wielościanu na sumę punktów, odcinków i wielokątów wypukłych? Innymi słowy, czy charakterystyka Eulera jest wyznaczona jednoznacznie?

Kwadrat, na przykład, możemy rozbić tak, jak na rysunku 6. We wszystkich trzech sytuacjach otrzymamy $W - K + S = 1$. I nie jest to przypadek. Okazuje się bowiem, że jeśli tylko podział wielościanu jest dopuszczalny, to liczba $W - K + S$ nie zależy od wyboru takiego podziału. Jeśli bowiem wybierzemy dowolne dwa dopuszczalne podziały tego samego wielościanu, to możemy przejść od jednego z nich do drugiego dokonując kroków polegających na: podziale odcinka na dwa (rys. 7), podziale wielokąta wypukłego na dwa lub likwidacji takich podziałów. Żadna z opisanych czterech operacji nie zmienia liczby $W - K + S$, liczba ta więc pozostaje stała.



Rys. 7

Powyższe rozumowanie nie tylko dowodzi, że wielkość $W - K + S$ nie zależy od wyboru podziału wielościanu, ale ponadto pokazuje, że jest to najprostsze wyrażenie o tej własności. Oznacza to, że Euler wybrał najlepszą możliwą lewą stronę „swego" wzoru.

Z powyższych uwag o charakterystyce Eulera mogłoby się wydawać, że są to jedynie ciekawostki kombinatoryczne. Tak jednak nie jest. Charakterystyka Eulera jest bardzo ważnym pojęciem matematyki współczesnej. O jej znaczeniu może świadczyć na przykład olbrzymia liczba różnych jej definicji i uogólnień. Niestety, objętość artykułów drukowanych w *Delcie* uniemożliwia przedstawienie (choćby w skrócie) najważniejszych jej własności i zastosowań. Ograniczymy się tylko do wymienienia dwóch: jest ona najprostszym niezmiennikiem topologicznym oraz w pełni charakteryzuje dwuwymiarowe orientowalne rozmaitości bez brzegu. Ostatnie zdanie brzmi niezwykle tajemniczo. Postaramy się wyjaśnić je bliżej w którymś z kolejnych numerów *Delty*. Tym, którzy chcą dowiedzieć się czegoś więcej na temat charakterystyki Eulera, polecamy książeczkę Ю.А. Шашкина „Эйлерова характеристика".