KĄCIK PRAC uczniowskich

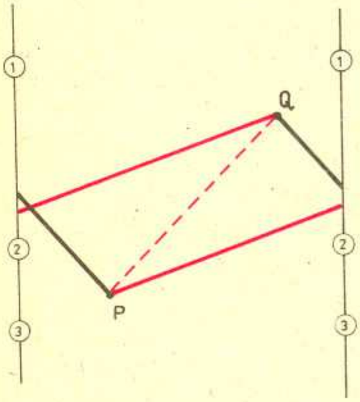
Propozycje ewentualnych tematów prac na Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki zamieszczamy od numeru 3/1988 (z pominięciem numerów 6 i 12 z 1988 roku oraz 1, 6, 7 i 8 z roku bieżacego). Oczywiście, chętnie widzimy także prace na inne tematy.

Płaszczyzny lokalnie euklidesowe

Sklejmy na płaszczyźnie euklidesowej te punkty, które łączą wielokrotności ustalonego z góry wektora $\overrightarrow{v}$. A więc punkt P sklejamy z punktami $P+\overrightarrow{v}$, $P-\overrightarrow{v}$, $P+3\overrightarrow{v}$, $P-7\overrightarrow{v}$ itd., ogólnie z punktami $P+k\overrightarrow{v}$, gdzie k przebiega zbiór liczb całkowitych.

Na tym rysunku sklejamy jednakowo oznaczone punkty.

Oczywiście, sklejenie wszystkich punktów płaszczyzny w jeden spełnia podany wyżej warunek. Aby tę możliwość wyeliminować, dopiszmy na końcu pierwszego zdania: „i tylko te punkty". Wówczas, jeżeli $\overrightarrow{PQ}$ nie jest wielokrotnością wektora $\overrightarrow{v}$, punkty P i Q nie zostaną sklejone. Nietrudny eksperyment myślowy pozwala odkryć, że w wyniku sklejenia otrzymamy powierzchnię walca. Tym, którzy wolą „patrzeć palcami" niż „oczyma wyobraźni", polecamy taką metodę: zaznaczyć na przezroczystej folii jakimś znaczkiem punkt P i (tym samym znaczkiem) punkty, które z nim mają być sklejone, potem (innym znaczkiem) punkt Q i sklejane z nim punkty, punkt R i ... , a następnie zwinąć folię w rurkę tak, by każdy znaczek było widać tylko jeden raz. To, co będzie widać – to właśnie wynik sklejenia. Albo (mówiąc uczenie) **lokalnie euklidesowa płaszczyzna** typu walca.

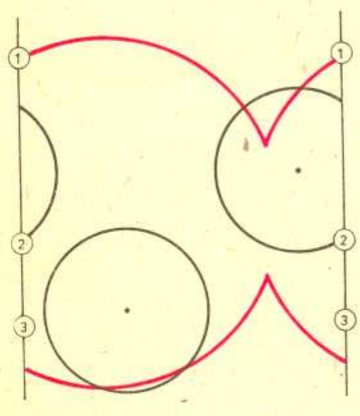


Punkty oznaczone kółeczkiem z tą samą cyferką reprezentują ten sam punkt. Umowa taka przyjęta jest na wszystkich dalszych rysunkach.

Dziwna ta nazwa ma swoje uzasadnienie. Mianowicie, jeśli odległości między punktami będziemy mierzyli nitką na walcu, to okaże się, że wszystkie pomiary wykonane w obrębie „koła" o średnicy mniejszej od długości wektora $\overrightarrow{v}$ dadzą takie same wyniki, jak gdyby były wykonane na płaszczyźnie; np. będzie prawdziwe twierdzenie Pitagorasa. (Koło zostało wzięte w cudzysłów, bo jest to teraz inna figura niż zwykłe koło – dalej już takie odróżnienia nie będą zaznaczane.) Jednak, dla odległości większych, różnice się pojawią. Taka sytuacja jest w matematyce oznaczana słowem „lokalnie".

Wdzięcznym zadaniem badawczym jest zbadanie geometrii otrzymanej przestrzeni. Zbadanie geometrii, czyli znalezienie możliwie dużej kolekcji odpowiedzi na pytania „jak wygląda...", ustalenie obowiązujących twierdzeń itp.

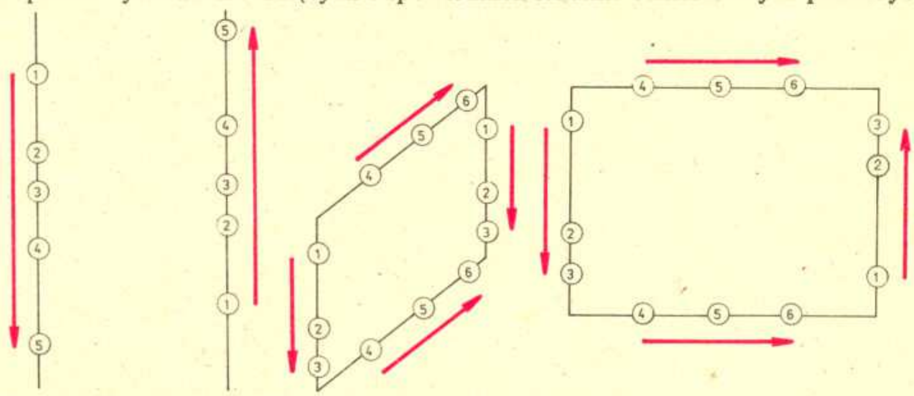
Dla stworzenia sobie lepszych warunków do takiego badania można lokalnie euklidesową płaszczyznę typu walca obejrzeć jeszcze inaczej. Weźmy bowiem walec i rozetnijmy go wzdłuż tworzącej. Otrzymamy pas. Będzie on przedstawiał walec, jeśli umówimy się, że punkty brzegów „leżące na tym samym poziomie" będziemy utożsamiali. Zostawiając chętnym doprecyzowanie tego sformułowania poprzestaniemy na dwóch rysunkach. Na pierwszym z nich mamy trzy odcinki łączące punkty P i Q, na drugim zaś dwa okręgi o tym samym małym promieniu i jeden o promieniu zdecydowanie większym. Odcinek to takie ułożenie nitki na walcu, że mocniej już naciągnąć się jej nie da – okazuje się (proszę sprawdzić na prawdziwym walcu), że dwa punkty można połączyć wieloma różnymi odcinkami (mamy początek naszej kolekcji). A okrąg może mieć „dziobki"!



Ta ostatnia metoda oglądania walca ma i tę zaletę, że może być zastosowana do badania innych płaszczyzn lokalnie euklidesowych. Można je otrzymać sklejając punkty różniące się o wielokrotne wykonywanie ustalonej symetrii z poślizgiem (otrzymuje się płaszczyznę typu wstęgi Möbiusa), sklejając punkty różniące się o wielokrotne (niezależne) wykonywanie przesunięć o dwa, ustalone, nierównoległe wektory (otrzymuje się płaszczyznę typu torusa), bądź sklejając punkty różniące się o wielokrotne (niezależne) wykonywanie ustalonej symetrii z poślizgiem i przesunięcia o ustalony wektor prostopadły do jej osi (płaszczyzna typu butelki Kleina).

Symetria z poślizgiem to złożenie symetrii osiowej z przesunięciem o wektor równoległy do osi. Tylko takie złożenie symetrii osiowej z przesunięciem jest przemienne (tj. obojętne jest, które z tych przekształceń wykonamy najpierw, a które potem).

Żadnego z tych sklejeń nie można jednak wykonać „fizycznie" – tak, jak zrobiliśmy to w przypadku płaszczyzny typu walca za pomocą przezroczystej folii. Żeby wykonać takie zwinięcia folii, musielibyśmy folię rozciągać, a to psuje lokalną euklidesowość. Pozostaje więc eksperyment myślowy, który można wspomóc rysunkami rozciętych odpowiednich lokalnie euklidesowych płaszczyzn.



Należy jednak pamiętać, że utożsamienie brzegów musi być gładkie, co oznacza, że po jego (myślowym) wykonaniu „spoina" nie może się niczym różnić od innych fragmentów uzyskanej płaszczyzny lokalnie euklidesowej.

Opracował M. K.

Poruszone tu sprawy są omawiane np. w rozdziale 7 książki: Marek Kordos, *O różnych geometriach*, seria *Delta przedstawia*, Wydawnictwa „Alfa", 1987. Jest też książka w całości poświęcona temu tematowi: В.В. Никулин, И.Р. Шафаревич, Геометрии и группы, „Наука", 1983. Ale to, co jest tam napisane, dotyczy sposobów uzyskiwania płaszczyzn lokalnie euklidesowych i nie daje odpowiedzi na pytania o geometrię tych płaszczyzn.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 I 1990

Zmieniamy zasadę ustalania terminu nadsyłania rozwiązań zadań ligowych – można je nadsyłać do końca miesiąca $n+3$.
Decyzję o zmianie podjęto w czerwcu 1989 r.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 187 (WT=2,10), 188 (WT=1,39), z numeru 3/1989

Józef Siwy	– Łaziska G	40,89 pkt
Henryk Kasprzak	– Żary	40,51 pkt
Andrzej Krzysztofowicz	– Gdańsk	39,01 pkt
Dariusz Rybacki	– Kraśnik	38,49 pkt
Andrzej Szymczak	– Gdańsk	37,73 pkt
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	37,09 pkt

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+3$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z matematyki nr 197, 198

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

197. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczby całkowite a_i, b_i $(i = 1, \ldots, p-1)$, przy czym różnice $a_i - b_i$ nie są podzielne przez p. Udowodnić, że można z każdej pary $\{a_i, b_i\}$ wybrać liczbę x_i tak, by suma $x_1 + \ldots + x_{p-1}$ była podzielna przez p.

198. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste x, dla których spełniona jest nierówność

$$(x-1)^{x+1} > (x+1)^{x-1}.$$

Za dziedzinę funkcji $(u, v) \mapsto u^v$ przyjmujemy tu zbiór wszystkich par liczb rzeczywistych (u, v) spełniających jeden z następujących warunków: a) $u > 0$, v dowolne; b) $u = 0$, $v \geq 0$; c) $u < 0$, v całkowite.

Zadanie **198** zaproponował pan Henryk Kornacki z Augustowa.

Zadania z fizyki nr 95, 96

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

95. Płot składający się z pionowych desek o szerokości a, między którymi występują szczeliny o szerokości b, zasłania odległy duży obiekt. Obserwator porusza się równolegle do płotu, w odległości d od niego, ze stałą prędkością v. Jaka powinna być ta prędkość, aby obserwator mógł widzieć cały obiekt w sposób możliwie niezakłócony? Przyjmujemy, że kierunek obserwacji jest prostopadły do płotu, a rozmiary kątowe obiektu są znacznie większe od stosunku b/d.

96. Trzy punkty materialne o masie m, obdarzone ładunkiem elektrycznym q, są połączone ze sobą nieważkimi nićmi o jednakowej długości d. W stanie równowagi, w warunkach bezgrawitacyjnych, nici tworzą trójkąt równoboczny. Wyznaczyć przyspieszenie każdego z punktów materialnych w chwili przecięcia jednej z nici.