Rachunkowa archeologia

Prowadzenie długich i żmudnych rachunków jest w wielu dyscyplinach ludzkiej działalności koniecznością. Nic więc dziwnego, że „od zawsze" starano się czynności te uprościć, tak dla skrócenia potrzebnego na ich wykonanie czasu, jak i dla zminimalizowania popełnianych przy tym błędów. Z jednej strony starano się budować przyrządy „rachujące", z drugiej – tworzono przepisy, algorytmy ułatwiające rachunki.

Najprostsze algorytmy to znane (mam nadzieję) ze szkoły przepisy pisemnego dodawania i mnożenia. To właśnie te przepisy zdecydowały o upowszechnieniu się w Europie już od XIV wieku liczb arabskich, do których te przepisy są dostosowane, i praktyczne wyeliminowanie przez nie liczb rzymskich w księgach kupieckich i pracach naukowych do końca XV wieku.

Oczywiście, używanie cyfr arabskich było w czasach wojen krzyżowych czymś w rodzaju ulegania wrogiej propagandzie. Wydane w 1299 roku statuty *Arte del Cambio* zakazują używania cyfr arabskich w dokumentach handlowych – sporządzone z ich udziałem dokumenty nie mają żadnej mocy prawnej. Przeglądając księgi rachunkowe Medicich znajdujemy cyfry arabskie w tekście opisowym w 1406 roku. Od roku 1439 zaczynają one występować w kolumnach różnych ksiąg. Od roku 1482 we wszystkich księgach prócz jednej (dla władz fiskalnych) są już cyfry arabskie. Ostatecznie cyfry rzymskie znikają z ksiąg rachunkowych Medicich w 1494 roku.

Nietrudno zauważyć, że przepis na dodawanie umożliwia dodanie równocześnie wielu liczb (w tak zwanym słupku), podczas gdy przepis na mnożenie umożliwia pomnożenie tylko dwóch. Usunięcie tej niewygody było przedmiotem najsilniejszego ataku rachmistrzów XVI wieku.

Warto wspomnieć o metodzie wykonywania wielu dodawań i odejmowań w jednym słupku. Polegało to na dzieleniu liczby dziesiętnej na cechę i mantysę, czyli na to, co dziś nazywamy częścią całkowitą (dodatnią lub ujemną) i „resztę" (zawsze nieujemną, mniejszą od 1). Dla liczby dodatniej zapis taki jest zwykłym zapisem dziesiętnym. Dla liczby ujemnej jest inaczej. Np.: $-2,7892 = \bar{3},2108$. W ten sposób rachunek:

$$2,7849 - 3,4752 + 11,82 - 1,234$$

można było wykonać w słupku

$$\begin{array}{r} 2,7849 \\ \bar{4},5248 \\ 11,8200 \\ \bar{2},7660 \\ \hline 9,8957 \end{array}$$

Zaczęto od tego, że próbowano, nawet w przypadku mnożenia dwóch liczb, zastąpić je dodawaniem. Pierwszą z dość rozpowszechnionych metod było użycie tablic kwadratów. Mamy mianowicie

$$a \cdot b = ((a+b)^2 - (a-b)^2)/4 .$$

A oto zastosowanie:

$$284 \cdot 391 = (675^2 - 107^2)/4 = (455\,625 - 11\,449)/4 =$$
$$= 444\,176/4 = 111\,044 .$$

Choć komuś mogłoby się zdawać, że metoda ta komplikuje rzeczy proste, to jednak XVI-wieczni rachmistrze uważali ją za szybszą i pewniejszą. Oczywiście, nie w przypadku tak prostych i „krótkich" liczb jak w podanym przykładzie, choć i takie rachunki „dla porządku" tak przeprowadzano. Ważną rzeczą było tu posiadanie dużych tablic kwadratów, ale pod koniec XVI wieku każdy szanujący się ośrodek naukowy dysponował tablicami kwadratów do 100 000, co umożliwiało mnożenie liczb pięciocyfrowych.

Spostrzeżenie, że mnożenie wykonuje się tak samo dla liczb o różnie umieszczonych przecinkach, a przecinek należy na zakończenie wstawić w odpowiednie miejsce, pozwalało zarówno sprowadzić mnożenie dowolnych liczb do mnożenia liczb całkowitych, jak i przeciwnie – do mnożenia ułamków właściwych, czyli liczb mniejszych od jedności. To ostatnie nasunęło pomysł wykorzystania do mnożenia tablic trygonometrycznych. Np.

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))/2 .$$

W podanym poprzednio przykładzie będzie to:

$$284 \cdot 391 \simeq 1\,000\,000 \cdot \cos 73^\circ 30' \cdot \cos 66^\circ 59' =$$
$$= 1\,000\,000 \cdot (\cos 140^\circ 29' + \cos 6^\circ 31')/2 \simeq$$
$$\simeq 1\,000\,000 \cdot (-0,7714 + 0,9936)/2 =$$
$$= 1\,000\,000 \cdot (0,2222)/2 = 111\,100 .$$

To, że wynik jest przybliżony, wzięło się stąd, iż dane są wzięte ze szkolnych tablic czterocyfrowych. A np. w 1613 r. Pitiscus wydał tablice piętnastocyfrowe. Przy ich użyciu wyszłoby „jak obszył", mimo że rachunek jest przybliżony niejako z założenia.

Istnienie takich tablic jest zresztą dowodem na to, że faktycznie w takich celach były używane – w żadnej sytuacji geometrycznej piętnastocyfrowa dokładność nie może mieć zastosowania.

I wreszcie, na przełomie XVI i XVII wieku wymyślono to, co zasłużyło się ludzkości w ciągu 3,5 wieku tak bardzo, że komputery długo jeszcze będą musiały pracować, by się zasłużyć podobnie. Chodzi mianowicie o logarytmy, czyli funkcje spełniające warunek

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) .$$

Funkcja taka po prostu zamienia mnożenie na dodawanie, a więc umożliwia mnożenie wielu czynników.

Początkowo logarytmy były to dwa ciągi – geometryczny i arytmetyczny. Aby pomnożyć dwie liczby, należało znaleźć je wśród wyrazów ciągu geometrycznego, dodać wyrazy ciągu arytmetycznego o tych właśnie numerach, odnaleźć sumę wśród wyrazów ciągu arytmetycznego i, jako iloczyn, wziąć wyraz ciągu geometrycznego o takim samym numerze.
Oczywiście, aby przybliżenia nie były zbyt grube, oba ciągi musiały być dość gęste. Chcąc takie otrzymać Szwajcar Jost Bürgi, pierwszy stosujący tę metodę, potęgował 1 + 0,0001, co (jak łatwo zauważyć) sprowadza się do dodawania liczb „przesuniętych":

$$a_{n+1} = a_n + 10^{-4} a_n .$$

Kolejny rachmistrz, szkocki arystokrata John Neper (Napier), potęgował 1 – 0,0000001, co znów sprowadza się do odejmowania liczb przesuniętych:

$$b_{n+1} = b_n - 10^{-7} b_n .$$

Jak widać, używano zarówno logarytmów rosnących (jak my dzisiaj), jak też malejących. Widać więc wyraźnie, że początkowo logarytmy nie miały wiele wspólnego (a może jednak miały) z opisaną w tekście funkcją.

Stosując logarytmy do poprzedniego przykładu (Nlog oznacza funkcję odwrotną do log) mamy:

$$\begin{aligned} 284 \cdot 391 &= \mathrm{Nlog}(\log 284 + \log 391) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Nlog}(2,4533 + 2,5922) = \\ &= \mathrm{Nlog}(5,0455) \simeq 111\,050 \end{aligned}$$

(te same tablice, też jest błąd). Czternastocyfrowe tablice takich logarytmów wydał (częściowo) Henry Briggs w 1624 roku, a uzupełnił je Ezechiel de Decker w 1627 roku.

Podobnie inną historią jest np. sposób korzystania z tablic logarytmów (ktoś, kto skończył szkołę mniej niż 20 lat temu, miałby zapewne kłopoty z odkryciem, skąd w logarytmach 284 i 391 wzięły się na początku dwójki).

Logarytmy dziesiętne oblicza się korzystając z podziału na cechę i mantysę. Cechą logarytmu jest najwyższa całkowita potęga dziesiątki mieszcząca się w danej liczbie. Np. cechą logarytmu liczby 275,438 będzie 2, dla liczby 5,324 otrzymamy 0, a dla 0,0123 będzie $\overline{2}$. W tablicach odszukujemy mantysę logarytmu, a na „całych" logarytmach rachujemy w słupku tak, jak to było podane wyżej.

Ważne natomiast jest spostrzeżenie, że logarytmy, o których na początku XIX wieku Laplace powiedział: *Wynalazek logarytmów skraca czas pracy z miesięcy do dni, dosłownie podwaja życie astronomów,* są dla młodego pokolenia równie egzotyczną skamieliną, jak dla ich starszych kolegów podane wcześniej, poprzedzające logarytmy, pomysły usprawnienia rachunków.

Ponieważ dodawanie odcinków geometrycznie odpowiada przesunięciu, więc jeśli na dwóch deseczkach zaznaczymy skalę logarytmiczną, to przesuwając je tak, by nad 1 jednej skali znalazła się liczba a drugiej skali, nad liczbą b pierwszej skali zobaczymy na drugiej skali liczbę $a \cdot b$.
Tego prostego wynalazku dokonał w 1620 roku Edmund Günter. Suwak logarytmiczny był w użyciu jeszcze do niedawna – 20 lat temu wielu inżynierów mnożyło suwakiem szybciej niż ich koledzy za pomocą kalkulatora (wynik znali, zanim „konkurencja" zdążyła nacisnąć wszystkie potrzebne klawisze).

Ciekawe, czy upowszechnienie komputerów spowoduje, że i na tabliczkę mnożenia będziemy patrzyli jak na wykopalisko. A jeśli tak, to kiedy?

Opracował M.K.

Rachunki komputerowe

Poważne skutki niepoważnej zmiany

Zdarza się czasem, że drobna zmiana danych bardzo zmienia wynik. Na przykład odejmijmy od wielomianu

$$w(x) = (x-1)(x-2)\ldots(x-19)(x-20),$$

wydawałoby się, niezauważalną poprawkę $2^{-23}x^{19}$. Oto pierwiastki poprawionego wielomianu.

1,000 000 000	10,095 266 145 ± 0,643 500 904 i
2,000 000 000	11,793 633 881 ± 1,652 329 728 i
3,000 000 000	13,992 358 137 ± 2,518 830 070 i
4,000 000 000	16,730 737 466 ± 2,812 624 894 i
4,999 999 928	19,502 439 400 ± 1,940 330 347 i
6,000 006 944	
6,999 697 234	
8,007 267 603	
8,917 250 249	
20,846 908 101	

Pojawiło się 5 par pierwiastków zespolonych o dużej części urojonej, a część rzeczywista nowych pierwiastków też znacznie różni się od pierwiastków pierwotnego wielomianu.

Z podobnym problemem spotykamy się znajdując wartości własne macierzy A i $A + \varepsilon B$ wymiaru $n \times n$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne (zespolone) macierzy zaburzonej są odległe od n-krotnej wartości własnej macierzy A, to znaczy od liczby 1, o $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$. Dla np. $n = 10$ i $\varepsilon = 10^{-10}$ wartości własne różnią się o $\frac{1}{10}$.

J. R.