Stosując logarytmy do poprzedniego przykładu (Nlog oznacza funkcję odwrotną do log) mamy:

$$\begin{aligned}284 \cdot 391 &= \mathrm{Nlog}(\log 284 + \log 391) \simeq \\ &\simeq \mathrm{Nlog}(2,4533 + 2,5922) = \\ &= \mathrm{Nlog}(5,0455) \simeq 111\,050\end{aligned}$$

(te same tablice, też jest błąd). Czternastocyfrowe tablice takich logarytmów wydał (częściowo) Henry Briggs w 1624 roku, a uzupełnił je Ezechiel de Decker w 1627 roku.

Podobnie inną historią jest np. sposób korzystania z tablic logarytmów (ktoś, kto skończył szkołę mniej niż 20 lat temu, miałby zapewne kłopoty z odkryciem, skąd w logarytmach 284 i 391 wzięły się na początku dwójki).

Logarytmy dziesiętne oblicza się korzystając z podziału na cechę i mantysę. Cechą logarytmu jest najwyższa całkowita potęga dziesiątki mieszcząca się w danej liczbie. Np. cechą logarytmu liczby 275,438 będzie 2, dla liczby 5,324 otrzymamy 0, a dla 0,0123 będzie $\overline{2}$. W tablicach odszukujemy mantysę logarytmu, a na „całych" logarytmach rachujemy w słupku tak, jak to było podane wyżej.

Ważne natomiast jest spostrzeżenie, że logarytmy, o których na początku XIX wieku Laplace powiedział: *Wynalazek logarytmów skraca czas pracy z miesięcy do dni, dosłownie podwaja życie astronomów,* są dla młodego pokolenia równie egzotyczną skamieliną, jak dla ich starszych kolegów podane wcześniej, poprzedzające logarytmy, pomysły usprawnienia rachunków.

Ponieważ dodawanie odcinków geometrycznie odpowiada przesunięciu, więc jeśli na dwóch deseczkach zaznaczymy skalę logarytmiczną, to przesuwając je tak, by nad 1 jednej skali znalazła się liczba a drugiej skali, nad liczbą b pierwszej skali zobaczymy na drugiej skali liczbę $a \cdot b$.
Tego prostego wynalazku dokonał w 1620 roku Edmund Günter. Suwak logarytmiczny był w użyciu jeszcze do niedawna – 20 lat temu wielu inżynierów mnożyło suwakiem szybciej niż ich koledzy za pomocą kalkulatora (wynik znali, zanim „konkurencja" zdążyła nacisnąć wszystkie potrzebne klawisze).

Ciekawe, czy upowszechnienie komputerów spowoduje, że i na tabliczkę mnożenia będziemy patrzyli jak na wykopalisko. A jeśli tak, to kiedy?

Opracował M.K.

Rachunki komputerowe

Poważne skutki niepoważnej zmiany

Zdarza się czasem, że drobna zmiana danych bardzo zmienia wynik. Na przykład odejmijmy od wielomianu

$$w(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-19)(x-20),$$

wydawałoby się, niezauważalną poprawkę $2^{-23}x^{19}$. Oto pierwiastki poprawionego wielomianu.

1,000 000 000	10,095 266 145 ± 0,643 500 904 i
2,000 000 000	11,793 633 881 ± 1,652 329 728 i
3,000 000 000	13,992 358 137 ± 2,518 830 070 i
4,000 000 000	16,730 737 466 ± 2,812 624 894 i
4,999 999 928	19,502 439 400 ± 1,940 330 347 i
6,000 006 944	
6,999 697 234	
8,007 267 603	
8,917 250 249	
20,846 908 101	

Pojawiło się 5 par pierwiastków zespolonych o dużej części urojonej, a część rzeczywista nowych pierwiastków też znacznie różni się od pierwiastków pierwotnego wielomianu.

Z podobnym problemem spotykamy się znajdując wartości własne macierzy A i $A + \varepsilon B$ wymiaru $n \times n$, gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wartości własne (zespolone) macierzy zaburzonej są odległe od n-krotnej wartości własnej macierzy A, to znaczy od liczby 1, o $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$. Dla np. $n = 10$ i $\varepsilon = 10^{-10}$ wartości własne różnią się o $\frac{1}{10}$.

J. R.