Wśród pierwszych 10 000 000 cyfr rozwinięcia dziesiętnego π poszczególne cyfry występują następującą liczbę razy: 999 440, 999 333, 1 000 306, 999 964, 1 001 093, 1 000 466, 999 337, 1 000 207, 999 814, 1 000 040.

Dzieląc pierwsze 10 000 000 cyfr π na 2 000 000 „rąk pokerowych" otrzymujemy: 604 976 rąk bez pary (teoretyczna liczba takich rąk – 604 800), 1 007 151 rąk z jedną parą (1 008 000), 216 520 z dwiema parami (216 000), 144 375 z trójką (144 000), 17 891 z fulem (18 000), 8 887 z karetą (9 000), 200 z pokerem (200).

Rozwiązanie zadania M 553. Oznaczmy przez N liczbę błędów w tekście i załóżmy, że pierwszy korektor wykrywa błąd z prawdopodobieństwem p, a drugi – r. Zatem szansa, że obaj wykryją dany błąd, wynosi $p \cdot r$. Mamy więc do czynienia z trzema schematami Bernoulliego. Na mocy prawa wielkich liczb można się spodziewać, że liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego przy dużej liczbie prób będzie bliska swojej średniej, czyli $Np \approx 450$, $Nr \approx 300$, $Npr \approx 250$. Stąd

$$N = \frac{Np \cdot Nr}{Npr} \approx \frac{450 \cdot 300}{250} = 540.$$

Tekst zawiera około 540 błędów.

Jeśli weźmiemy $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, to z powyższych trzech wzorów łatwo wyprowadzić, że

$$\pi = \frac{2\left(\operatorname{agm}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}{1 - \sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^j c_j^2}.$$

Zastępując średnią przez a_{n+1} i biorąc w mianowniku n-tą sumę częściową otrzymujemy przybliżenia

$$\pi_n = \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum\limits_{j=0}^{n} 2^j c_j^2}.$$

Dość elementarne, acz nieco długie rachunki pokazują, iż

$$0 < \pi - \pi_n < \frac{\pi^2 2^{n+4} e^{-\pi 2^{n+1}}}{\left(\operatorname{agm}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}.$$

Przy algorytmie Salamina i Brenta liczba działań potrzebna do obliczenia π z dokładnością do 10^{-n} jest proporcjonalna do $\log n$, a nie jak w poprzednich metodach do n. Tak więc czas potrzebny do obliczenia π z taką dokładnością maleje z $n^2 \cdot \log n \cdot \log\log n$ do $n \cdot (\log n)^2 \cdot \log\log n$. Zważywszy, że tylko czas wypisania n cyfr jest proporcjonalny do n, algorytm powyższy jest dosyć bliski algorytmowi optymalnemu. Później powstały algorytmy jeszcze nieco szybsze, ale główny przełom to wykorzystanie przez Salamina i Brenta starych dziewiętnastowiecznych wzorów.

J. R.

Patrz w niebo

Około 1650 r. włoski astronom Giovanni Riccioli zauważył, że Mizar – ζ Wielkiej Niedźwiedzicy – to dwie bardzo bliskie siebie gwiazdy. W następnych latach inni obserwatorzy zauważyli podwójność γ Barana, α Bliźniąt, γ Panny i innych. Pytanie tylko, co to jest gwiazda podwójna. Jak blisko siebie muszą znaleźć się dwie gwiazdy, aby ich układ określić jako gwiazdę podwójną? Intuicja podpowiada, że układ taki stanowią gwiazdy leżące „podejrzanie" blisko siebie. W 1767 r. Anglik John Michell pierwszy zasugerował, że gwiazdy widziane jako podwójne są w istocie układami dwóch składników związanych fizycznie. Jego zdaniem dowodziła tego liczba gwiazd podwójnych znacznie większa od ich liczby oczekiwanej przy losowym rozkładzie gwiazd na niebie.

Wkrótce pojawiły się lepsze dowody fizycznej więzi składników gwiazd podwójnych. W 1798 r. T. Hornsby stwierdził, że oba składniki Kastora (α Bliźniąt) mają ten sam ruch na niebie, a pięć lat później William Herschel sprawę rozstrzygnął. Dysponując mianowicie kilkudziesięcioletnimi obserwacjami kilku gwiazd podwójnych zauważył, że ruch względny ich składników można wytłumaczyć tylko przyjmując ich wzajemny obieg. Jeszcze później dało się stwierdzić, że obieg ten jest zgodny z prawami Keplera, a więc i z prawem grawitacji – stało się to pierwszym dowodem, że newtonowskiemu prawu grawitacji podlegają też odległe ciała niebieskie.

Oczywiście, niektóre z gwiazd podwójnych okazały się też skutkiem przypadkowego ustawienia się niemal na jednej prostej z Ziemią dwóch gwiazd nie mających ze sobą nic wspólnego. Są to tzw. gwiazdy optycznie podwójne. Każdy „oprzyrządowany" obserwator nieba przyzna, że aż trudno uwierzyć, iż nie są to układy fizycznie podwójne. Najbardziej chyba znaną taką gwiazdą jest δ Herkulesa. Jej składniki mają jasność 3,1 i 8,2 mag. W odległości 9″ znajdowały się one około 1960 r. i teraz para ta rozdziela się. W rzeczywistości składnik jaśniejszy odległy jest od nas o 30 pc, a słabszy o 40 pc. Inną gwiazdą optycznie podwójną jest κ Herkulesa, a jej składniki leżą o 100 i 200 pc od nas. Jeszcze inne to np. o Smoka, ψ^5 Woźnicy, β Łabędzia (Albireo). Ta ostatnia składa się z gwiazd odległych kątowo o 0′,5, o dość zbliżonych jasnościach (3,1 i 5,1 mag), za to bardzo różniących się odległościach od nas (o kilkaset lat świetlnych) i barwach (jedna żółta, druga niebieska), co pięknie widać w niewielkiej nawet lunecie.

dr Tomasz KWAST