FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

UPORZĄDKOWANE JONY W PUŁAPKACH

Spektroskopia jonów schwytanych w różnego rodzaju pułapkach magnetycznych, elektrycznych i laserowych umożliwiła ostatnio zaobserwowanie bardzo interesujących efektów uporządkowania się jonów w symetryczne struktury przestrzenne. Jony w pułapkach mogą być chłodzone za pomocą odpowiednio dostrojonej wiązki laserowej (patrz Fizyczne nowinki – Mrożone atomy, *Delta* 3/1989). W obszarze temperatur milikelwinowych oddziaływania elektrostatyczne między jonami są porównywalne co do rzędu wielkości z ich energią termiczną i rozpoczyna się uporządkowanie układu. Zjawisko to jest dobrą analogią procesu krystalizacji ciał stałych przy obniżaniu temperatury. Ostatnio opublikowano cały szereg zdjęć tak uporządkowanych układów. Grupa fizyków z Instytutu Optyki Kwantowej Maxa Plancka (RFN) pokazała istotną różnicę między świeceniem (poszerzonym przez efekt Dopplera) bezładnej „chmury" kilku jonów magnezu, znajdujących się w pułapce elektrostatycznej, a ostrą linią świecenia tych samych jonów po ich uporządkowaniu. Zmiana częstotliwości chłodzącego lasera lub parametrów pola tworzącego pułapkę umożliwiała wielokrotne „skraplanie" i „krystalizację" owej grupy jonów. Przedstawiony na taśmie wideo proces „krystalizacji" przebiegał w czasie między kolejnymi klatkami filmu (tzn. krótszym niż 40 ms). Odległość jonów w „sieci" wynosiła około 20 μm. Z kolei grupa fizyków z National Bureau of Standards (USA) badała „pseudomolekuły" zbudowane z małej liczby jonów rtęci schłodzonych do 8 mK wyznaczając nawet energie drgań takich układów. Większe ilości jonów (setki i tysiące) mogą być trzymane w pułapkach magnetycznych. Grupa amerykańska chłodziła w takiej pułapce jony berylu. Stwierdzono, że schłodzone jony tworzą kolejne powłoki. Przy 20 jonach w pułapce powstawała tylko jedna powłoka, przy 15 000 jonów – szesnaście powłok. Jony mogą dość łatwo poruszać się wewnątrz powłoki (z szybkością rzędu 1 mm/s), ale rzadko zmieniają zajmowane powłoki. Struktura taka przypomina ciekły kryształ zwany smektykiem. Teoretycznie przewidywano sferyczny kształt powłok. Eksperyment wykazał, że mogą one również przybierać postać cylindryczną, co nie jest jeszcze wyjaśnione. Przy dalszym schładzaniu jonów również wewnątrz danej powłoki pojawia się dodatkowe uporządkowanie. Należy sądzić, że wraz z udoskonaleniem metod eksperymentalnych chwytania i chłodzenia jonów możemy spodziewać się jeszcze wielu ciekawych rezultatów.

Obliczanie π

Przez ponad 250 lat obliczano kolejne cyfry rozwinięcia dziesiętnego π korzystając z rozwinięcia funkcji arctg w szereg Taylora

$$\operatorname{arctg}(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^8} - \dots$$

i różnych wzorów wyrażających π za pomocą arkusa tangensa, np.:

$$\pi = 16 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$

$$\pi = 24 \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{57} + 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Tego ostatniego wzoru użyto w roku 1961, gdy obliczono 100 000 cyfr π. Wymagało to wykonania 105 000 działań z dokładnością, z jaką chcieliśmy π obliczyć. Czas wykonywania jednego działania z dokładnością n cyfr jest proporcjonalny do $n \cdot \log n \cdot \log\log n$, tak więc zmniejszenie liczby działań jest sprawą bardzo istotną. Nowe algorytmy pozwalają obliczyć π z tą samą dokładnością przy użyciu tylko 112 działań. Jakież to nowe odkrycie matematyczne spowodowało tę rewolucję? Są to po prostu wzory dotyczące całek eliptycznych pochodzące z ... początku XIX wieku. Z ich pomocą w roku 1975 Salamin i Brent (niezależnie od siebie!) znaleźli nowe wzory na π.

Jeszcze Gauss rozpatrywał tak zwaną średnią arytmetyczno-geometryczną. Dla $0 < k < 1$ przyjmijmy $a_0 = 1$, $b_0 = k$, oraz $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$ dla $n = 1, \dots$ Średnią arytmetyczno-geometryczną liczb 1 i k ($\operatorname{agm}(k)$) nazywamy wspólną granicę ciągów (a_n) i (b_n). Dlaczego ta wspólna granica istnieje? Ciąg (a_n) jest malejący (średnia arytmetyczna jest nie mniejsza niż geometryczna), ciąg (b_n) rosnący, ponadto $b_n \le a_n$ (nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną). Tak więc oba ciągi mają granice. Oznaczmy $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$. Przechodząc w równości $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ do granicy otrzymujemy $\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$, skąd $\alpha = \beta$.

Oba ciągi są zbieżne bardzo szybko.

Oznaczmy $c_0 = \sqrt{1-k^2}$, $c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$. Mamy

$$a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 - a_n b_n = \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2,$$

tak więc

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{4(a_{n+1} + b_{n+1})}, \quad \text{czyli} \quad c_{n+1} \le \frac{c_n^2}{4a_{n+1}}.$$

A zatem błąd w $(n+1)$-szym kroku jest mniej więcej kwadratem błędu z n-tego kroku.

Wzory, z których korzystali Brent i Salamin, dotyczą całek eliptycznych pierwszego rodzaju:

$$I(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - k^2 \sin t}}$$

i drugiego rodzaju

$$J(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin t}\, \mathrm{d}t.$$

Gauss wykazał, że

$$I(k') = \frac{\pi}{2 \operatorname{agm}(k)}, \qquad \text{gdzie} \quad k' = \sqrt{1-k^2}.$$

Dla całek drugiego rodzaju mamy również

$$J(k') = I(k')\left(1 - \frac{1}{2}(c_0^2 + 2c_1^2 + 4c_2^2 + \dots + 2^n c_n^2 + \dots)\right).$$

Trzeba jeszcze znać wzór Legendre'a

$$J(k)I(k') + J(k')I(k) - I(k)I(k') = \frac{\pi}{2}.$$

Wśród pierwszych 10 000 000 cyfr rozwinięcia dziesiętnego π poszczególne cyfry występują następującą liczbę razy: 999 440, 999 333, 1 000 306, 999 964, 1 001 093, 1 000 466, 999 337, 1 000 207, 999 814, 1 000 040.

Dzieląc pierwsze 10 000 000 cyfr π na 2 000 000 „rąk pokerowych" otrzymujemy: 604 976 rąk bez pary (teoretyczna liczba takich rąk – 604 800), 1 007 151 rąk z jedną parą (1 008 000), 216 520 z dwiema parami (216 000), 144 375 z trójką (144 000), 17 891 z fulem (18 000), 8 887 z karetą (9 000), 200 z pokerem (200).

Jeśli weźmiemy $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, to z powyższych trzech wzorów łatwo wyprowadzić, że

$$\pi = \frac{2\left(\operatorname{agm}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}{1 - \sum\limits_{j=0}^{\infty} 2^j c_j^2}.$$

Zastępując średnią przez a_{n+1} i biorąc w mianowniku n-tą sumę częściową otrzymujemy przybliżenia

$$\pi_n = \frac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum\limits_{j=0}^{n} 2^j c_j^2}.$$

Dość elementarne, acz nieco długie rachunki pokazują, iż

$$0 < \pi - \pi_n < \frac{\pi^2 2^{n+4} e^{-\pi 2^{n+1}}}{\left(\operatorname{agm}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2}.$$

Przy algorytmie Salamina i Brenta liczba działań potrzebna do obliczenia π z dokładnością do 10^{-n} jest proporcjonalna do $\log n$, a nie jak w poprzednich metodach do n. Tak więc czas potrzebny do obliczenia π z taką dokładnością maleje z $n^2 \cdot \log n \cdot \log\log n$ do $n \cdot (\log n)^2 \cdot \log\log n$. Zważywszy, że tylko czas wypisania n cyfr jest proporcjonalny do n, algorytm powyższy jest dosyć bliski algorytmowi optymalnemu. Później powstały algorytmy jeszcze nieco szybsze, ale główny przełom to wykorzystanie przez Salamina i Brenta starych dziewiętnastowiecznych wzorów.

J. R.

Patrz w niebo

Około 1650 r. włoski astronom Giovanni Riccioli zauważył, że Mizar – ζ Wielkiej Niedźwiedzicy – to dwie bardzo bliskie siebie gwiazdy. W następnych latach inni obserwatorzy zauważyli podwójność γ Barana, α Bliźniąt, γ Panny i innych. Pytanie tylko, co to jest gwiazda podwójna. Jak blisko siebie muszą znaleźć się dwie gwiazdy, aby ich układ określić jako gwiazdę podwójną? Intuicja podpowiada, że układ taki stanowią gwiazdy leżące „podejrzanie" blisko siebie. W 1767 r. Anglik John Michell pierwszy zasugerował, że gwiazdy widziane jako podwójne są w istocie układami dwóch składników związanych fizycznie. Jego zdaniem dowodziła tego liczba gwiazd podwójnych znacznie większa od ich liczby oczekiwanej przy losowym rozkładzie gwiazd na niebie.

Wkrótce pojawiły się lepsze dowody fizycznej więzi składników gwiazd podwójnych. W 1798 r. T. Hornsby stwierdził, że oba składniki Kastora (α Bliźniąt) mają ten sam ruch na niebie, a pięć lat później William Herschel sprawę rozstrzygnął. Dysponując mianowicie kilkudziesięcioletnimi obserwacjami kilku gwiazd podwójnych zauważył, że ruch względny ich składników można wytłumaczyć tylko przyjmując ich wzajemny obieg. Jeszcze później dało się stwierdzić, że obieg ten jest zgodny z prawami Keplera, a więc i z prawem grawitacji – stało się to pierwszym dowodem, że newtonowskiemu prawu grawitacji podlegają też odległe ciała niebieskie.

Oczywiście, niektóre z gwiazd podwójnych okazały się też skutkiem przypadkowego ustawienia się niemal na jednej prostej z Ziemią dwóch gwiazd nie mających ze sobą nic wspólnego. Są to tzw. gwiazdy optycznie podwójne. Każdy „oprzyrządowany" obserwator nieba przyzna, że aż trudno uwierzyć, iż nie są to układy fizycznie podwójne. Najbardziej chyba znaną taką gwiazdą jest δ Herkulesa. Jej składniki mają jasność 3,1 i 8,2 mag. W odległości 9″ znajdowały się one około 1960 r. i teraz para ta rozdziela się. W rzeczywistości składnik jaśniejszy odległy jest od nas o 30 pc, a słabszy o 40 pc. Inną gwiazdą optycznie podwójną jest κ Herkulesa, a jej składniki leżą o 100 i 200 pc od nas. Jeszcze inne to np. o Smoka, ψ^5 Woźnicy, β Łabędzia (Albireo). Ta ostatnia składa się z gwiazd odległych kątowo o 0,′5, o dość zbliżonych jasnościach (3,1 i 5,1 mag), za to bardzo różniących się odległościach od nas (o kilkaset lat świetlnych) i barwach (jedna żółta, druga niebieska), co pięknie widać w niewielkiej nawet lunecie.

dr Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania M 553. Oznaczmy przez N liczbę błędów w tekście i załóżmy, że pierwszy korektor wykrywa błąd z prawdopodobieństwem p, a drugi – r. Zatem szansa, że obaj wykryją dany błąd, wynosi $p \cdot r$. Mamy więc do czynienia z trzema schematami Bernoulliego. Na mocy prawa wielkich liczb można się spodziewać, że liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego przy dużej liczbie prób będzie bliska swojej średniej, czyli $Np \approx 450$, $Nr \approx 300$, $Npr \approx 250$. Stąd

$$N = \frac{Np \cdot Nr}{Npr} \approx \frac{450 \cdot 300}{250} = 540.$$

Tekst zawiera około 540 błędów.