# O przysłowiowej dokładności astronomicznej

*Prof. dr Grzegorz SITARSKI*


Jako chłopiec czytałem wiele popularnych książek o Wszechświecie. Pamiętam moje zaskoczenie, kiedy w trzech różnych źródłach znalazłem trzy zupełnie różne wartości odległości słynnej Wielkiej Mgławicy w Andromedzie: 750 tysięcy, jeden milion i półtora miliona lat świetlnych. Nastawiło mnie to nieufnie do naszej znajomości danych dotyczących Wszechświata, ale potem dowiedziałem się, że odległości galaktyk nie wyznacza się z dokładnych pomiarów, lecz ocenia się je na podstawie różnych przesłanek, a wartość takiej oceny zależy od znajomości wielu czynników (dziś odległość mgławicy w Andromedzie oceniamy na ponad dwa miliony lat świetlnych).

Wiele lat później zetknąłem się praktycznie z prawdziwą dokładnością obliczeń astronomicznych, kiedy jako młody astronom brałem udział w obserwacjach częściowego zaćmienia Słońca widocznego w okolicach Warszawy. Nasza trzyosobowa ekipa miała wykonać serię zdjęć zaćmiewanego Słońca w stacji obserwacyjnej Politechniki Warszawskiej w Józefosławiu, a moim zadaniem było obliczenie dokładnego momentu początku zaćmienia. Na podstawie odpowiednich danych zaczerpniętych z rocznika astronomicznego oraz znajomości dokładnych wartości współrzędnych geograficznych miejsca obserwacji obliczyłem ten moment z dokładnością do sekundy. Początek zaćmienia można uchwycić obserwując na ekranie obraz tarczy Słońca rzucony przez lunetę, w pewnym momencie idealnie równy brzeg zostaje „nadgryziony" przez nasuwającą się tarczę niewidocznego Księżyca. Tuż przed oczekiwanym momentem początku zjawiska patrzyliśmy z napięciem na obraz tarczy Słońca wspólnie z kierowcą, który nas przywiózł i dotąd dosyć obojętnie przyglądał się naszym przygotowaniom do obserwacji. Kiedy jednak dostrzegliśmy początek zaćmienia kilka sekund od wyznaczonego przeze mnie momentu, kierowca wyraźnie zaczął odnosić się do nas z szacunkiem i podziwem, że astronomowie potrafią tak dokładnie przewidywać zjawiska na niebie (powiedział nam to w drodze powrotnej).

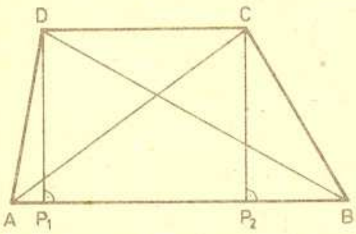
Obserwacje ruchu planet prowadzone od wieków oraz znajomość praw, według których poruszają się one wokół Słońca, istotnie pozwalają przewidywać z dużą dokładnością konfiguracje planet, Słońca i Księżyca na niebie nawet na setki lat naprzód. Inaczej wygląda sprawa przewidywania powrotów komet okresowych. Komety obiegają Słońce po zdecydowanie eliptycznych orbitach, a obserwowane są tylko na łuku orbity w pobliżu peryhelium. Dlatego też trzeba zebrać obserwacje z kilku pojawień się komety, aby wyznaczyć dostatecznie dokładne wartości elementów orbity i na tej podstawie obliczyć efemerydę, czyli położenia komety na niebie podczas jej następnego powrotu. Kiedy prof. Felicjan Kępiński w 1926 r. podjął badania ruchu komety okresowej Kopffa wracającej do Słońca co 6,5 roku, obliczał efemerydy kolejnych powrotów komety i tuż przed wojną zdążył jeszcze wysłać swoje wyniki do Międzynarodowego Biura Telegramów Astronomicznych mieszczącego się wówczas w Kopenhadze; dzięki temu kometa była obserwowana także w 1939 r. Kometę Kopffa odnaleziono wtedy na niebie w odległości 3" od miejsca obliczonego, a jak mały jest to kąt, mówi nam obrazowe porównanie: pod takim kątem widać średnicę ludzkiego włosa z odległości siedmiu metrów.

Aby tak dokładnie obliczyć położenie komety na niebie, trzeba znać jej położenie w przestrzeni, a więc i elementy orbity z dokładnością siedmiu czy nawet ośmiu cyfr znaczących. Rachunki z taką dokładnością zapewnia nam dziś każdy kalkulator kieszonkowy, nie wystarcza ona jednak do wykonania wszystkich obliczeń związanych z dokładnym przewidzeniem powrotu komety po kilku czy kilkunastu latach. Wiąże się to z koniecznością numerycznego całkowania równań różniczkowych opisujących ruch komety w polu grawitacyjnym Słońca i planet.

Równania ruchu komety w heliocentrycznym układzie współrzędnych prostokątnych mają postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\frac{x}{r^3} - k^2\sum_{p=1}^{9} m_p\left(\frac{x - X_p}{\rho_p^3} + \frac{X_p}{R_p^3}\right) \tag{1}$$

**Rozwiązanie zadania M 555.**




Wprowadzimy następujące oznaczenia: $AB = x$, $CD = y$, $DP_1 = h$, $BP_1 = p_1$, $AP_2 = p_2$. Mamy $\frac{x+y}{2} \cdot h = 1$. Dalej, niech $d_1 = BD$, $d_2 = AC$. Nietrudno zobaczyć, że $p_1 + p_2 = x + y$. Ponadto dłuższa przekątna ma dłuższy rzut na podstawę, jako że $d_1^2 = p_1^2 + h^2$, $d_2^2 = p_2^2 + h^2$. Niech $BD$ będzie dłuższą przekątną. Mamy wtedy

$$p_1 \geq \frac{x+y}{2} = \frac{1}{h}$$

Stąd

$$d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq$$
$$\geq \frac{1}{h^2} + h^2 = \left(\frac{1}{h} - h\right)^2 + 2,$$

wobec tego $d_1 \geq \sqrt{2}$. Łatwo pokazać przykład trapezu, dla którego $d_1 = \sqrt{2}$: musi być wtedy $h = \frac{1}{h}$, czyli $h = 1$ i wystarczy wziąć kwadrat.


i podobnie dla $y$ i $z$, gdzie $x$, $y$, $z$ są współrzędnymi komety, $X_p$, $Y_p$, $Z_p$ współrzędnymi planety, $r$ odległością komety od Słońca, $\rho_p$ odległością komety od planety, a $R_p$ odległością planety od Słońca; $k = 0,01720209895$ jest stałą Gaussa związaną ze stałą grawitacji w przyjętym układzie jednostek (jednostką długości jest średnia odległość Ziemi od Słońca, czyli tzw. jednostka astronomiczna, jednostką czasu – doba, a jednostką masy – masa Słońca). Równanie (1) nie ma rozwiązania analitycznego, tzn. nie da się go przedstawić w postaci wzorów zawierających czas jako parametr i pozwalających obliczyć wartości $x$, $y$, $z$ dla dowolnej chwili. Pozostaje więc tylko sposób całkowania numerycznego.

Metody numerycznego całkowania równań różniczkowych polegają np. na przybliżeniu występującej w równaniu funkcji czasu wielomianem dość wysokiego stopnia powstałym z rozwinięcia funkcji w nieskończony szereg Taylora względem czasu i obcięcia go do kilku lub kilkunastu wyrazów; szereg ten jest dostatecznie szybko zbieżny zwykle w niewielkim przedziale czasowym zwanym krokiem całkowania. Zestaw odpowiednich wzorów i algorytm postępowania pozwala na obliczanie wartości scałkowanej funkcji krok po kroku, aż do wyczerpania zadanego interwału czasowego. Taka metoda pozwala całkować każdy układ równań różniczkowych, ma jednak bardzo poważną wadę, mianowicie stałe narastanie błędu numerycznego całkowania. Są dwa źródła tego błędu: błąd obcięcia wynikający z uwzględnienia skończonej liczby wyrazów szeregu Taylora oraz błąd zaokrąglenia, bo wszystkie wielkości biorące udział w obliczeniach muszą mieć skończoną liczbę cyfr, a ostatnia cyfra jest już wynikiem zaokrąglenia. Nic więc dziwnego, że aby osiągnąć wymaganą dokładność końcowego wyniku całkowania, musimy brać pod uwagę nieuchronne narastanie błędu numerycznego, a wobec tego trzeba wszystkie obliczenia wykonywać z podwójną precyzją, czyli uwzględniając 15 cyfr znaczących we wszystkich liczbach występujących w rachunkach. I nie ma tu nic do rzeczy, że dane początkowe mogą być mało dokładne, musimy bowiem mieć pewność, że końcowe wyniki zależą tylko od dokładności danych początkowych, a nie są zafałszowane błędem całkowania numerycznego.

Największy kłopot w metodach numerycznego całkowania stanowi dobór odpowiedniej wartości kroku. W różnicowych metodach wielokrokowych, jak np. metoda Adamsa czy Cowella, wartość ta co najmniej przez kilka lub kilkanaście kroków musi być stała. W metodach jednokrokowych, jak metoda Rungego–Kutty, wartość kroku może być teoretycznie na każdym kroku inna, ale nie bardzo wiadomo, jaka ma ona być. W przypadku całkowania równań ruchu komety problem doboru odpowiedniego kroku całkowania jest bardzo ważny, bo zmiany ruchu komety od peryhelium do aphelium są duże, a mogą być także znaczne w przypadku zbliżenia komety do planety. Dlatego też w badaniach ruchów komet koniecznie trzeba stosować numeryczne metody całkowania ze zmiennym krokiem.

Doskonałe rezultaty daje tu metoda rekurencyjnych szeregów potęgowych. Zastosowanie tej metody pokażemy na przykładzie całkowania równań ruchu keplerowskiego, czyli ruchu komety tylko pod wpływem przyciągania Słońca. Dokonajmy podstawienia $s = -k^2 r^{-3}$ oraz wykorzystajmy zależność $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Wówczas równania ruchu możemy uzupełnić dwoma dodatkowymi równaniami i zapisać je w następującej postaci, oznaczając różniczkowanie względem czasu kropką nad zmienną:

$$\begin{aligned} r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, \quad r\dot{s} = -3s\dot{r}, \\ \ddot{x} &= sx, \quad \ddot{y} = sy, \quad \ddot{z} = sz. \end{aligned} \tag{2}$$

Przypuśćmy, że jakaś funkcja czasu $f$ dana jest w postaci szeregu potęgowego

$$f(t) = f_0 + \sum_{n=1}^{N} f_n (t - t_0)^n. \tag{3}$$

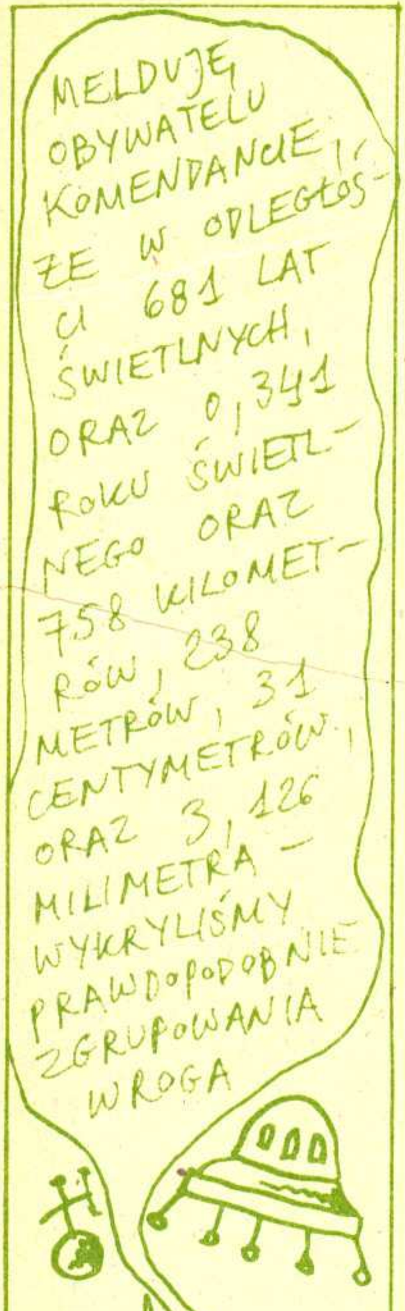
Jeśli dla $n = 0, 1, \ldots, N$ znamy wartości liczbowe współczynników $f_n$, to możemy obliczyć wartość $f(t)$ dla każdego $t$ w przedziale $\langle t_0, t_0 + h \rangle$, gdzie wartość $h$ zależy od $N$ i wymaganej dokładności liczbowej wartości $f$. Wypiszmy szeregi typu (3) dla wszystkich wielkości występujących w równaniach (2), zróżniczkujmy je względem czasu, aby otrzymać szeregi dla pochodnych, podstawmy je do równań (2), wymnóżmy szeregi i uporządkujmy wyrazy względem potęg czasu, a następnie przyrównajmy obustronnie współczynniki przy jednakowych potęgach czasu. Otrzymamy wówczas wzory rekurencyjne na kolejne współczynniki w rozwinięciach typu (3).

**Rozwiązanie zadania M 554.** Jeśli ciąg $(x_n)$ jest zbieżny, to jego granica $g$ spełnia równanie $g = g(2 - yg)$; stąd $g = 0$ lub $g = \frac{1}{y}$.
Niech $x_n = \frac{1}{y}(1 - d_n)$. Wtedy

$$x_{n+1} = \frac{1}{y}(1 - d_n)\left(2 - y \cdot \frac{1}{y}(1 - d_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{y}(1 - d_n)(1 + d_n) = \frac{1}{y}(1 - d_n^2);$$

czyli $d_{n+1} = d_n^2$. Wyjściowy ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $(d_n)$ jest zbieżny, tzn. dla $-1 \le d_1 \le 1$. Wynika stąd warunek na $a$: ponieważ $a = \frac{1}{y}(1 - d_1)$, to $d_1 = 1 - ay$, musi więc być $-1 \le 1 - ay \le 1$, czyli $0 \le a \le \frac{2}{y}$. Jeśli $a = 0$ lub $a = \frac{2}{y}$, to $x_n \to 0$, w pozostałych przypadkach $x_n \to \frac{1}{y}$.
**Uwaga.** Ponieważ $d_{n+1} = d_n^2$, ciąg $(x_n)$ jest bardzo szybko zbieżny: liczba dokładnych cyfr podwaja się w każdym kroku. Na przykład dla $x_1 = 0,5$ i $y = 3$ otrzymujemy $x_2 = 0,25$, $x_3 = 0,3125$, $x_4 = 0,33203125$, $x_5 = 0,333328247\ldots$, $x_6 = 0,333333333\ldots$. Toteż stosuje się tę metodę w technice komputerowej do szybkiego obliczania odwrotności. Pokrewna metoda pozwala obliczyć $\sqrt{y}$: bierzemy wtedy $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{y}{x_n}\right)$.




Danymi początkowymi będą wartości współrzędnych $x$, $y$, $z$ oraz ich pochodnych $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (czyli składowych prędkości komety) dla chwili $t_0$, tj. $x_0$, $y_0$, $z_0$ oraz $x_1$, $y_1$, $z_1$. Wzory na kolejne współczynniki rozwinięcia wyglądają następująco:

$$r_0 = (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^{1/2}, \quad s_0 = -k^2/r_0^3,$$
$$r_1 = (x_0 x_1 + y_0 y_1 + z_0 z_1)/r_0, \quad s_1 = -3 s_0 r_1 / r_0,$$
$$x_2 = s_0 x_0 / 2, \quad y_2 = s_0 y_0 / 2, \quad z_2 = s_0 z_0 / 2,$$

a dalej kolejne współczynniki wyższych rzędów dla $n = 1, 2, \ldots, N$:

$$(n+1) r_0 r_{n+1} = (n+1)(x_{n+1} x_0 + y_{n+1} y_0 + z_{n+1} z_0) + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(x_{k+1} x_{n-k} + y_{k+1} y_{n-k} + z_{k+1} z_{n-k} - r_{k+1} r_{n-k}),$$

$$(n+1) r_0 s_{n+1} = -3(n+1) r_{n+1} s_0 - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(3 r_{k+1} s_{n-k} + s_{k+1} r_{n-k}),$$

$$(n+1)(n+2) x_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} s_k x_{n-k}$$

i podobnie dla $y$ i $z$.

Przebieg całkowania krok po kroku jest następujący. Po obliczeniu wszystkich współczynników $x_n$, $y_n$, $z_n$ określamy optymalną wartość kroku całkowania $h$. Definiując $A_N = |x_N| + |y_N| + |z_N|$ oraz przyjmując dokładność obliczeń $\varepsilon$, obliczamy wartość kroku $h = (\varepsilon / A_N)^{1/N}$. Dalej dla $t_h = t_0 + h$ obliczamy

$$x_h = x_0 + \sum_{n=1}^{N} x_n h^n \quad \text{oraz} \quad \dot{x}_h = x_1 + \sum_{n=2}^{N} n x_n h^{n-1}$$

i podobnie dla $y$ i $z$; otrzymane wartości $x_h$, $y_h$, $z_h$ oraz $\dot{x}_h$, $\dot{y}_h$, $\dot{z}_h$ wykorzystujemy jako dane początkowe do następnego kroku całkowania.

Metoda rekurencyjnych szeregów potęgowych jest metodą jednokrokową, a dzięki optymalizacji wartości kroku dla zadanej dokładności obliczeń jest prawie wolna od narastania błędu obcięcia. Udowodnił to leningradzki matematyk B.F. Miaczin, którego poznałem osobiście w Instytucie Astronomii Teoretycznej, a podziw dla jego pracy na zawsze zachowałem w pamięci, bowiem Miaczin jest od urodzenia niewidomy. Metodę tę stosujemy w opracowanych w Centrum Badań Kosmicznych PAN programach obliczeniowych do badania ruchu komet i planetoid. Oczywiście, uwzględnienie przyciągania wszystkich planet, a także innych wpływów, jak efekty relatywistyczne czy efekty niegrawitacyjne, niepomiernie komplikuje wzory obliczeniowe w stosunku do przytoczonych tutaj dla ruchu keplerowskiego. Jest to w pewnym sensie wadą metody, bo dodanie każdego nowego członu w równaniach ruchu wymaga modyfikacji programu całkowania. Jednak zalety metody gwarantującej dużą dokładność końcowych wyników całkowania są oczywiste, a raz napisany i sprawdzony program może służyć do całkowania równań ruchu najrozmaitszych komet i planetoid. Jasne jest, że przy tak olbrzymiej ilości działań arytmetycznych, wykonywanych podczas każdego kroku całkowania, konieczne jest zastosowanie szybkich komputerów, a wszystkie obliczenia prowadzi się w podwójnej precyzji. Dzięki istnieniu takich programów przepowiednia powrotu komety okresowej nie jest już wielkim problemem, a komety zostają odnajdywane na niebie za pomocą czułych przyrządów jako bardzo słabe obiekty w miejscach dokładnie wskazanych obliczeniami.

Uważny Czytelnik mógłby sądzić, że gdy prof. Kępiński obliczał ruch komety Kopffa w czasach, kiedy o komputerach nikomu się nie śniło, musiał dokonać gigantycznej pracy prowadząc skomplikowane piętnastocyfrowe obliczenia, aby dokładnie przewidzieć powrót komety. Otóż tak źle nie było, bo stosowano wówczas inne metody, polegające na obliczaniu perturbacji w ruchu keplerowskim komety, czyli obliczano zmiany jej elementów orbity. Wiązało się to także z numerycznym całkowaniem różniczkowych równań zmian elementów orbity w czasie, ale w tym przypadku wystarczał w zupełności rachunek nawet pięciocyfrowy. Wzory opisujące zmiany elementów orbity są jednak o wiele bardziej skomplikowane niż równania ruchu we współrzędnych prostokątnych, dlatego też warto było opracować specjalne metody obliczeniowe, wykorzystując dla rachunków komputerowych formalną prostotę zapisu równań ruchu.