Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1989

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 183 (WT=3,27), 184 (WT=2,55), 185 (WT=1,79) i 186 (WT=2,65) z numerów 1 i 2/1989

Kazimierz Serbin	– Sanok	43,72 pkt
Jerzy Małopolski	– Kraków	40,86 pkt
Andrzej Krzysztofowicz	– Gdańsk	39,01 pkt
Dariusz Rybacki	– Kraśnik	38,49 pkt
Andrzej Szymczak	– Gdańsk	37,73 pkt
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	37,09 pkt
Henryk Kasprzak	– Żary	37,02 pkt

Zadania z matematyki nr 195, 196

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

195. Dwie identyczne talie po n kart stasowano razem. Przyjmujemy, że wszystkie układy (permutacje) są jednakowo prawdopodobne. Odkrywamy karty po jednej aż do chwili, gdy wśród odkrytych kart znajdą się dwie identyczne; wówczas przerywamy odkrywanie. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby kart, które zostaną odkryte.
Uwaga. Wynik należy podać w możliwie zwięzłej postaci (bez symboli $\sum$, „...", procedur rekurencyjnych; dopuszczalne symbole: silnia, symbol Newtona, najprostsze działania, standardowe funkcje elementarne).

196. Dla dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC oznaczmy przez P_1, P_2, P_3 rzuty tego punktu odpowiednio na boki AB, BC, CA. Dowieść, że iloraz
$$\frac{|AP_1|+|BP_2|+|CP_3|}{|PP_1|+|PP_2|+|PP_3|}$$
jest wielkością stałą (gdy P przebiega wnętrze trójkąta) wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadanie **196** zaproponował pan Krzysztof Hryniewiecki z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1989

Przypominamy treść zadań:

191. Wyznaczyć liczbę permutacji $(x_1,\ldots,x_{30})$ zbioru $\{1,\ldots,30\}$ spełniających warunki:
$$x_{i-2} < x_i \quad \text{dla} \quad 3 \le i \le 30, \qquad x_{i-3} < x_i \quad \text{dla} \quad 4 \le i \le 30.$$

192. Dowieść, że dla a, b, $c > 0$ jest
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}.$$

191. Permutację $(x_1,\ldots,x_n)$ zbioru $\{1,\ldots,n\}$ (gdzie $n \ge 4$) nazwiemy dopuszczalną, jeśli spełnia warunki:

(1) $\quad x_{i-2} < x_i$ dla $3 \le i \le n$, $\quad x_{i-3} < x_i$ dla $4 \le i \le n$.

(Przyjmujemy, że dla $n=3$ permutacje dopuszczalne są określone przez sam tylko pierwszy warunek, a dla $n \le 2$ wszystkie permutacje są dopuszczalne.)
Wykażemy, że jeżeli $(x_1,\ldots,x_n)$ jest permutacją dopuszczalną zbioru $\{1,\ldots,n\}$, $n \ge 3$, to

(2) $\qquad x_k < x_n$ dla $k < n-1$.

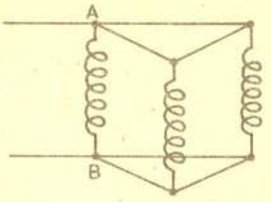
Uzasadnienie wynika z (1):
jeśli $n-k$ parzyste, to $x_k < x_{k+2} < x_{k+4} < \ldots < x_n$;
jeśli $n-k$ nieparzyste ≥ 3, to $x_k < x_{k+3} < x_{k+5} < \ldots < x_n$.
Wobec (2), $x_k \ne n$ dla $k < n-1$, a więc $n \in \{x_{n-1}, x_n\}$. Są dwie możliwości:
1° $n = x_n$; wtedy $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ może być dowolną dopuszczalną permutacją zbioru $\{1,\ldots,n-1\}$.
2° $n = x_{n-1}$; wtedy, zgodnie z (2), $x_n = \max\{x_k : k \ne n-1\} = n-1$, zaś $(x_1,\ldots,x_{n-2})$ może być dowolną dopuszczalną permutacją zbioru $\{1,\ldots,n-2\}$.
Oznaczmy przez d_n liczbę dopuszczalnych permutacji zbioru $\{1,\ldots.n\}$. Z 1° i 2° wynika zależność rekurencyjna $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. Przy tym $d_1 = 1$, $d_2 = 2$. Liczby d_n są więc kolejnymi wyrazami ciągu Fibonacciego. Stosując otrzymaną zależność rekurencyjną bez trudu znajdujemy $d_{30} = 1\,346\,269$.

192. Oznaczmy:
$$f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} \qquad \text{dla} \quad x,y>0$$
i zauważmy, że
$$\begin{aligned} f(x,y)+f(y,x) &= (x+y)\frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2} = \\ &= (x+y)\frac{(x+y)^2+3(x-y)^2}{3(x+y)^2+(x-y)^2} \ge \frac{x+y}{3}, \end{aligned}$$
podczas gdy
$$f(x,y) - f(y,x) = x - y.$$
Rozważana w zadaniu suma równa się
$$S = f(a,b) + f(b,c) + f(c,a).$$
Przyjmijmy ponadto
$$S' = f(b,a) + f(c,b) + f(a,c).$$
Z wyprowadzonych tożsamości otrzymujemy
$$S + S' \ge \frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} = \frac{2}{3}(a+b+c)$$
oraz
$$S - S' = (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0.$$
A wobec tego
$$S \ge \frac{a+b+c}{3}.$$

Zadania z fizyki nr 93, 94

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

93. Trzy jednakowe cewki o indukcyjności L, nawinięte w tę samą stronę, połączono równolegle w taki sposób (rys. 1), że współczynnik indukcji wzajemnej każdej pary tych cewek jest jednakowy i wynosi M. Jaka jest indukcyjność zastępcza L_{AB} układu tych cewek?



Rys. 1

94. Rakieta III stopnia o masie własnej $M = 4$ Mg i początkowej masie paliwa $m = 7$ Mg rozpoczyna na wysokości $H = 100$ km nad powierzchnią Ziemi samodzielny lot z prędkością początkową $v_0 = 1$ km/s w kierunku pionowym ku górze. Przyjmując, że przez cały okres $T = 90$ s pracy silnika jego siła ciągu $F = 100$ kN jest stała i skierowana pionowo w górę, wyznaczyć zależność prędkości v rakiety oraz jej wysokości h od czasu i przedstawić ją w postaci wykresów. Obliczyć maksymalną wysokość, na jaką wzniesie się rakieta. Podać przyjęte założenia.
Zadanie daje się rozwiązać analitycznie, ale zachęcamy do użycia metod numerycznych z wykorzystaniem kalkulatora lub komputera.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 81 (WT=1,65) i 82 (WT=2,47) z numeru 1/1989

Paweł Perkowski	– Szczecin	44,34	pkt
Roman Musiał	– Katowice	44,00	pkt
Wiesław Kacprzak	– Kraków	43,04	pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	38,29	pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	37,49	pkt
Aleksander Surma	– Myszków	35,73	pkt
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	34,95	pkt
Tomasz Wietecha	– Tarnów	32,37	pkt
Mariusz Bogacz	– Pińczów	27,66	pkt
Wojciech Peisert	– Wrocław	25,56	pkt

Panowie Perkowski i Musiał stają się członkami Klubu z numerami 13 i 14.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1989

Przypominamy treść zadań:

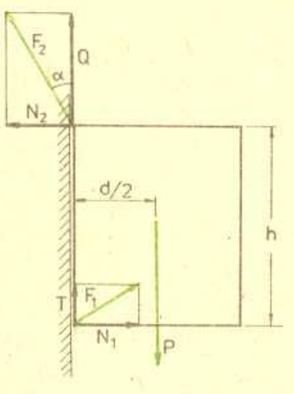
89. Prostopadłościenną szafkę o wysokości $h = 0,5$ m i głębokości $d = 0,4$ m wieszamy na dwóch stalowych hakach luźno osadzonych w poziomych otworach w betonowej ścianie za pomocą zaczepów zamocowanych w jej górnych narożach. Dla ustalenia punktów styku „pleców" szafki ze ścianą stosujemy cienkie podkładki o współczynniku tarcia (o ścianę) f_1: $0 \leq f_1 \leq 0,75$. Jaką wartość f_1 należy dobrać i w którym miejscu przytwierdzić podkładki, aby zminimalizować niebezpieczeństwo wyciągnięcia haków ze ściany przez szafkę? Przyjmujemy, że środek ciężkości szafki pokrywa się z jej środkiem geometrycznym, a współczynnik tarcia stali o beton wynosi $f_2 = 0,5$. Czy zastosowanie dodatkowych haków podpierających dolną, przyścienną krawędź szafki mogłoby poprawić sytuację?

90. Czy można tak dobrać wilgotność otoczenia (powietrza) i średnicę kropel wody, aby krople te całkowicie zamieniały się w parę nie pobierając ciepła z otoczenia? Napięcie powierzchniowe wody wynosi $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2}$ J/m^2, ciepło parowania wody – $r = 2,3 \cdot 10^6$ J/kg.

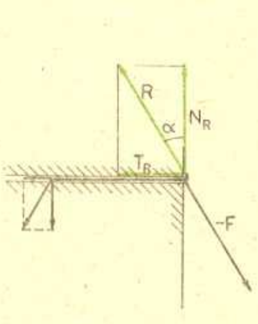
89. Na rysunku 2 przedstawiono siły działające na szafkę w przypadku, gdy podkładka umieszczona jest przy dolnej krawędzi szafki. P oznacza siłę ciężkości, $F_1 = N_1 + T$ – siłę, jaka działa na szafkę ze strony podkładki (N_1 – siła nacisku, T – siła tarcia), F_2 – siłę, którą na szafkę działa hak. W stanie równowagi wypadkowa siła musi być równa zeru, z czego wynika $Q + T = P$, $N_1 = N_2 = N$. Z warunku znikania momentu siły działającego na szafkę wynika ponadto $Nh = Qd/2$. Siła tarcia T spełnia nierówność $T \leq f_1 N$. Na podstawie powyższych zależności znajdujemy warunek na kąt α:

$$(*) \qquad \operatorname{tg}\alpha = N/Q = k/(1 - kT/N) \leq k/(1 - kf_1),$$

gdzie $k = d/(2h)$.



Rys. 2



Rys. 3

Rysunek 3 przedstawia siły działające na hak. Przy założeniu, że hak jest długi, mamy w przybliżeniu $R = -F$ (zaniedbujemy tu siły działające na drugi koniec haka, w rzeczywistości siły te utrudniają jego wyciągnięcie). Na to, żeby hak nie wysunął się z otworu, musi być spełniony związek $\operatorname{tg}\alpha = T_R/N_R \leq f_2$. Kąt α powinien więc być jak najmniejszy. Z zależności (*) wynika zatem, że wartość siły tarcia T powinna również być jak najmniejsza. Należy więc dobrać podkładkę o minimalnym współczynniku tarcia f_1. Dla $f_1 = 0$ mamy $\operatorname{tg}\alpha \leq k = 0,4$, czyli zachodzi nierówność $\operatorname{tg}\alpha < f_2$ i hak utrzyma się w ścianie. Natomiast dla $f_1 = 0,75$ będzie $\operatorname{tg}\alpha \leq 0,57$ i może nastąpić wyciągnięcie haka. Łatwo można wykazać, że umieszczenie podkładki w innym położeniu pogorszy sytuację. Podparcie dolnej krawędzi szafki, dzięki czemu mogłoby nastąpić zniknięcie siły Q, byłoby bardzo niekorzystne.

90. Pozytywna odpowiedź na postawione pytanie ma miejsce wtedy, gdy energia wymagana dla odparowania pewnej ilości wody z kropli będzie mniejsza lub równa zmianie energii napięcia powierzchniowego związanej ze zmniejszeniem się jej średnicy. Energia napięcia powierzchniowego kulistej kropli o promieniu R wynosi $4\pi R^2\sigma$. Zmniejszenie promienia kropli o $\Delta R \ll R$ powoduje zmianę powierzchni o $\Delta S = 8\pi R\Delta R$, co pociąga za sobą zmniejszenie energii napięcia powierzchniowego o $\Delta E_n = 8\pi\sigma R\Delta R$. Z drugiej strony odpowiednia zmiana objętości kropli wynosi $\Delta V = 4\pi R^2\Delta R$, co odpowiada odparowaniu masy $\Delta m = 4\pi\rho R^2\Delta R$ i wymaga energii $\Delta E_p = 4\pi r\rho R^2\Delta R$. Warunek $\Delta E_p \leq \Delta E_n$ zachodzi dla $R \leq R_0 = 2\sigma/(r\rho) = 6 \cdot 10^{-11}$ m. Otrzymana wartość R_0 jest porównywalna z rozmiarami cząsteczek wody, z czego wynika negatywna odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie. Parowanie wody może jeszcze odbywać się kosztem energii wewnętrznej wody zawartej w kropli, czyli obniżania się jej temperatury. Energia ta jest jednak niewystarczająca dla odparowania całej wody, a ponadto obniżenie się temperatury wody wobec otoczenia musiałoby prowadzić do wymiany ciepła z otoczeniem. Wilgotność powietrza ma o tyle znaczenie, że przy wilgotności względnej 100% efektywnie parowanie wody w ogóle nie zachodzi.