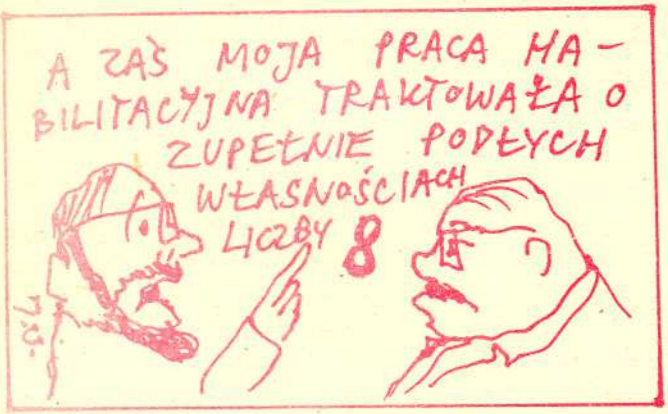
mała delta

Zdumiewające własności liczby 7



Podaj siedem liczb, a ja znajdę wśród nich kilka kolejnych, których suma jest podzielna przez 7.

Rzeczywiście, np.

$\underline{2, 3, 5, 11}, 13, 17, 19;$

$19, \underline{3, 17, 2, 13}, 11, 5;$

$\underline{2, 32, 8}, 16, 4, 64, 1.$

Spróbujmy udowodnić sformułowaną powyżej hipotezę.

Najpierw o królikach i klatkach, czyli o Zasadzie Dirichleta. Zasada ta stwierdza: jeśli mamy więcej królików niż klatek i wszystkie króliki zamkniemy w klatkach, to w którejś klatce muszą być co najmniej dwa króliki. Fakt zupełnie oczywisty, jednak bardzo przydatny w matematyce.

Chcemy na przykład wykazać, że wśród $n+1$ liczb naturalnych znajdą się dwie, których różnica jest podzielna przez n. Królikami będą tu reszty z dzielenia danych $n+1$ liczb przez n, a klatkami liczby $0, 1, \ldots, n-1$. Królików jest więcej, czyli dwie liczby dają tę samą resztę z dzielenia przez n – to znaczy, że ich różnica jest przez n podzielna.

Tę samą zasadę zastosujemy do dowodu twierdzenia:

Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$ można wybrać kolejne liczby, tzn. liczby $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}$, tak, by suma $a_k + \ldots + a_{k+m}$ dzieliła się przez n.

Zadanie podane na wstępie jest szczególnym przypadkiem dla $n = 7$.

Narzuca się pomysł, by za króliki wziąć wszystkie możliwe sumy kolejnych liczb, a za klatki reszty z dzielenia przez n. Sum jest dużo (n zaczynających się od a_1, $n-1$ zaczynających się od a_2, ... , 1 zaczynająca się od a_n, razem $n + (n-1) + \ldots + 1 = n(n+1)/2$), reszt mniej, a więc dwie sumy dają tę samą resztę, zatem ich rożnica...

I tu stop. Różnica sum kolejnych liczb na ogół nie jest sumą kolejnych liczb, np.

$$a_1 + \ldots + a_5 - (a_3 \ldots + a_7) = a_1 + a_2 - a_6 - a_7 .$$

Co robić? Spróbujmy brać tylko takie sumy, których różnica dalej jest sumą kolejnych liczb. Na przykład: a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $a_1 + \ldots + a_n$. Teraz już będzie dobrze.

Czy rzeczywiście? Przecież sum jest n, a reszt z dzielenia przez n tyleż. Zasady Dirichleta nie da się zastosować. Co jednak znaczy, że któraś z sum $a_1 + \ldots + a_k$ daje z dzielenia przez n resztę 0? A to, że ta suma jest podzielna przez n i koniec dowodu. Jeśli zaś żadna z sum nie daje reszty 0, to mamy $n-1$ klatek – reszty $1, 2, \ldots, n-1$ – i n sum: a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $a_1 + \ldots + a_n$. Któreś dwie sumy dają więc tę samą resztę (Zasada Dirichleta) i ich różnica jest poszukiwaną sumą kolejnych liczb.

Małą Deltę przygotował Jerzy RYLL