Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 X 1989

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z matematyki nr 193, 194

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

193. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano dokładnie jednym z dwóch kolorów w taki sposób, że żaden trójkąt równoboczny o boku długości 1 nie ma wszystkich wierzchołków jednakowego koloru.
a) Dowieść, że istnieje trójkąt równoboczny o boku długości $\sqrt{3}$, mający wszystkie wierzchołki jednego koloru.
b) Dać przykład pokolorowania o wymienionej w pierwszym zdaniu własności.

194. Niech $n \geq 2$ będzie dowolną, ustaloną liczbą naturalną. Dowieść, że jest tylko skończenie wiele par liczb całkowitych (x, y) spełniających równanie

$$x^n + (x+1)^n = y^{2n} + (y+1)^{2n}.$$

Zadanie **194** zaproponował pan Marcin Mazur z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1989

Przypominamy treść zadań:

189. Rozpatrujemy trójkąty T i czworokąty Q opisane na danym kole K. Wyznaczyć kąty oraz określić wzajemne położenie figur T i Q, dla których pole części wspólnej $T \cap Q$ jest minimalne.

190. Dane $m, n \geq 1$, naturalne; m nieparzyste. Czy liczby $2^m - 1$ i $2^n + 1$ muszą być względnie pierwsze?

189. Dla ustalonego trójkąta T i czworokąta Q część wspólna tych figur jest siedmiokątem opisanym na kole K. Jego pole jest nie mniejsze niż pole siedmiokąta foremnego opisanego na K (wynika to łatwo z wypukłości funkcji tangens w przedziale $\langle 0; \frac{1}{2}\pi)$ i z nierówności Jensena). Szukamy więc trójkąta T i czworokąta Q, dla których $T \cap Q$ jest siedmiokątem foremnym; wówczas pole $T \cap Q$ będzie minimalne.
Niech A_1, A_2, A_3 będą punktami styczności koła K z bokami trójkąta T i niech B_1, B_2, B_3, B_4 będą punktami styczności koła K z bokami czworokąta Q. Siedmiokąt $T \cap Q$ jest foremny, gdy wymienione punkty dzielą okrąg koła K na siedem równych łuków. Siedem punktów, wśród których są trzy punkty jednego typu i cztery punkty drugiego typu, można usytuować na okręgu na cztery sposoby:

(1) $B_1A_1A_2A_3B_2B_3B_4$

(2) $B_1A_1B_2A_2B_3A_3B_4$

(3) $B_1A_1A_2B_2A_3B_3B_4$

(4) $B_1A_1A_2B_2B_3A_3B_4$

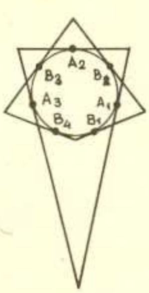
(każda konfiguracja daje się sprowadzić do jednej z powyższych przez stosowne przenumerowanie punktów). Warunek, by punkty A_i były punktami styczności koła z obwodem trójkąta, eliminuje konfiguracje (1) i (3). Natomiast z (2) i (4) dostajemy:

(2) trójkąt o kątach $\frac{3}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, $\frac{1}{7}\pi$, czworokąt o kątach $\frac{3}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, $\frac{5}{7}\pi$;

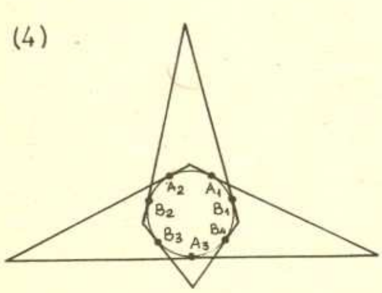
(4) trójkąt o kątach $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{5}{7}\pi$, czworokąt o kątach $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{5}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, $\frac{5}{7}\pi$,

usytuowane, jak przedstawia rysunek (w każdym przypadku obie figury mają wspólną oś symetrii). Znalezione pary figur stanowią rozwiązanie zadania.

(2)



(4)

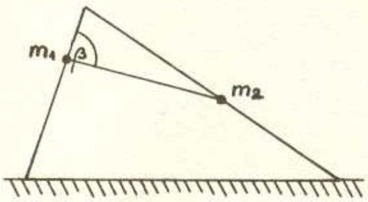


190. Tak. Przypuśćmy, że $d = \mathrm{NWD}(2^m - 1, 2^n + 1) > 1$. Z założenia $2^m \equiv 1 \pmod{d}$, $2^n \equiv -1 \pmod{d}$. Pierwszą kongruencję podnosimy do potęgi n, a drugą do potęgi m. Otrzymujemy $1 \equiv 2^{mn} \equiv -1 \pmod{d}$, skąd $d = 2$. Sprzeczność, bo $2^n + 1$ jest liczbą nieparzystą.

Zadania z fizyki nr 91, 92

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

91. Gdy poziomo rozpiętą nylonową żyłkę – używaną do suszenia bielizny – pociągamy (pocieramy) wzdłuż zwilżonymi palcami, słyszymy charakterystyczny, dźwięk. Jeśli na żyłce wiszą jakieś drobne, suche „szmatki", możemy jednocześnie zauważyć, że przemieszczają się one wzdłuż żyłki w tym samym kierunku, w jakim przesuwamy po niej palce. Wytłumaczyć to zjawisko, w miarę możliwości ilustrując własnym materiałem doświadczalnym.



Rys. 1

92. Dwa ciała, o masach odpowiednio m_1 i m_2, połączone nieważką nicią, mogą się poruszać bez tarcia po prostopadłych prowadnicach ustawionych w płaszczyźnie pionowej tak, że jedna z nich nachylona jest pod kątem α względem poziomu (rys. 1). Znaleźć kąt między nicią łączącą ciała a tą prowadnicą, gdy układ ciał znajduje się w stanie równowagi. Określić, jaki to rodzaj równowagi.

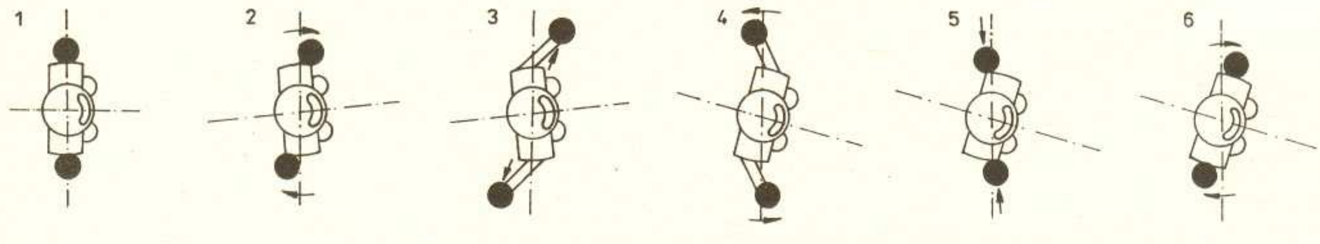
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1989

Przypominamy treść zadań:

87. Czy kosmonauta unoszący się swobodnie w przestrzeni kosmicznej (nie obracający się względem swego środka masy) może dokonać obrotu swego ciała, na przykład o 180°, nie wykorzystując żadnych oddziaływań z ciałami zewnętrznymi ani odrzutu? Jeśli jest to możliwe, to w jaki sposób?

88. Kwadratowa ramka o boku a z drutu miedzianego o polu przekroju poprzecznego S wiruje ze stałą prędkością kątową ω w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B wokół osi leżącej w płaszczyźnie ramki, równoległej do jednej pary boków i prostopadłej do kierunku pola magnetycznego.
Obliczyć maksymalną wartość momentu siły, jaki musi pokonać silniczek napędzający ramkę. Opór właściwy miedzi wynosi ρ. Czy wynik ulegnie zmianie i jak, jeśli ramka będzie zawierała n zwojów cieńszego drutu, wykonanego z tej samej ilości miedzi, co ramka pierwotna?

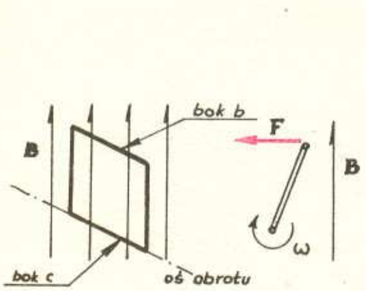
87. Jest to możliwe przez umiejętne wykorzystanie prawa zachowania momentu pędu układu izolowanego, jaki stanowi kosmonauta. Należy mianowicie dokonywać kolejno wzajemnych obrotów części tego układu w przeciwne strony, zmieniając w międzyczasie moment bezwładności części układu względem osi obrotu. Wystarczy, że kosmonauta będzie wykonywał następujące ruchy rękoma (najlepiej trzymając w nich spore masy): obrót w jedną stronę rąk położonych w pobliżu osi ciała, oddalenie rąk od osi ciała, obrót w drugą stronę, powrót rąk do pozycji wyjściowej. Rysunek 2 przedstawia schematycznie kosmonautę – oglądanego od strony głowy – w układzie inercjalnym, w kolejnych fazach tej operacji. Powtarzając ją wielokrotnie kosmonauta może się obrócić o dowolny kąt.



Rys. 2

88. Rozpatrzmy ogólniejszy przypadek ramki zawierającej n zwojów drutu o polu przekroju poprzecznego S/n. Pochodna czasowa strumienia wektora indukcji magnetycznej **B** przechodzącego przez ramkę osiąga podczas obrotu ramki wokół osi maksymalną wartość w położeniu ramki równoległym do wektora **B**. Wartość ta $\frac{d\Phi}{dt} = Ba^2\omega$ nie zależy od położenia osi – zgodnego z warunkami zadania – przyjmiemy więc, że oś obrotu pokrywa się z bokiem c ramki (rys. 3).
W omawianym położeniu ramki w jej uzwojeniu indukuje się maksymalna siła elektromotoryczna o wartości bezwzględnej $|\epsilon| = nBa^2\omega$. Uwzględniając opór uzwojenia $R = 4n^2a\rho/S$ i zaniedbując przesunięcie fazowe związane z samoindukcją uzwojenia obliczamy natężenie płynącego w danej chwili przez uzwojenie prądu $|I| = |\epsilon|/R = BaS\omega/(4n\rho)$. Na bok b ramki (rysunek) działa siła $F = nIaB$ (której zwrot jest zgodny z regułą Lenza). W omawianym położeniu zarówno wartość tej siły, jak i jej ramię względem osi przyjmują wartość maksymalną. Wobec tego maksymalna wartość momentu siły jest równa

$$M = Fa = B^2a^3S\omega/(4\rho)\,.$$



Rys. 3

Jak widać, wartość ta nie zależy od n.
Można łatwo wykazać, że powyższy wynik jest słuszny dla dowolnego umiejscowienia osi obrotu spełniającego warunki zadania.