Twierdzenie Cramera orzeka, między innymi, że układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy wyznacznik utworzony ze współczynników przy niewiadomych jest różny od zera. Jeżeli więc znamy to twierdzenie, żądany wynik wynika bezpośrednio z faktu, iż w rozwinięciu wyznacznika $|a_{ij}|$ dokładnie jeden składnik (a mianowicie $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$) nie jest podzielny przez p. Wyznacznik bowiem jest różny od zera i rozwiązanie z samych zer jest zatem jedynym rozwiązaniem.

Jeżeli nie znamy twierdzenia Cramera

Dr Czesław WOWK

Przypuśćmy, że mamy do rozwiązania następujące

Zadanie. Niech dany będzie układ równań

$$(1)\qquad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}$$

o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że jeżeli istnieje liczba pierwsza p taka, że p dzieli a_{ij}, gdy $i \neq j$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,n)$ oraz p nie dzieli a_{ii} $(i = 1,2,\ldots,n)$, to układ (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach wymiernych, tzn. ma tylko rozwiązanie $(0,0,\ldots,0)$.

Znając twierdzenie Cramera wykazywalibyśmy, że wyznacznik macierzy współczynników tego układu jest różny od zera. A jeżeli nie znamy twierdzenia Cramera? Tym, którzy nie znają twierdzenia Cramera (i tym, którzy twierdzenie Cramera znają), proponujemy rozwiązanie tego zadania wykorzystujące tylko elementarne własności pewnej funkcji określonej w zbiorze liczb wymiernych (o wartościach rzeczywistych nieujemnych), tzw. normy p-adycznej.

Musimy jednak najpierw zdefiniować tę funkcję (będziemy oznaczali ją symbolem v_p).

Niech p będzie dowolną (ustaloną) liczbą pierwszą. Każdą liczbę wymierną (różną od zera)

$$(2)\qquad w = \frac{a}{b},$$

gdzie a, b $(b \neq 0)$ są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, można zapisać w postaci

$$(3)\qquad w = p^k \frac{c}{d},$$

gdzie k jest liczbą całkowitą, natomiast c, d są liczbami całkowitymi względnie pierwszymi, takimi, że $p \nmid c$ oraz $p \nmid d$.

Jeżeli w przedstawieniu (2) $p|a$, to $k > 0$, a jeżeli $p|b$, to $k < 0$, natomiast gdy $p \nmid a$ oraz $p \nmid b$, to $k = 0$. Jeżeli np. $p = 7$, wtedy liczbę $w_1 = \frac{21}{5}$ można zapisać w postaci $w_1 = 7^1 \frac{3}{5}$, liczbę $w_2 = \frac{10}{13}$ w postaci $w_2 = 7^0 \frac{10}{13}$, a liczbę $w_3 = \frac{3}{14}$ w postaci $w_3 = 7^{-1}\frac{3}{2}$. Jeżeli liczba w jest różną od zera liczbą wymierną zapisaną w postaci (3), to przyjmujemy, że $v_p(w) = p^{-k}$. Dodatkowo przyjmujemy, że $v_p(0) = 0$ (np. $v_7\left(\frac{21}{5}\right) = \frac{1}{7}$, $v_7\left(\frac{10}{13}\right) = 1$, $v_7\left(\frac{3}{14}\right) = 7$). Nietrudno jest udowodnić, że zdefiniowana funkcja v_p ma następujące własności:
(4) $v_p(a) \leq 1$ dla dowolnej liczby całkowitej a,
(5) $v_p(w_1 w_2) = v_p(w_1)v_p(w_2)$ dla dowolnych liczb wymiernych w_1, w_2,
(6) $v_p(w_1 + w_2) \leq \max\{v_p(w_1), v_p(w_2)\}$ dla dowolnych liczb wymiernych w_1, w_2,
(7) $v_p(w) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w = 0$.
Z nierówności (6) wynika, że
(8) $v_p(w_1 + w_2 + \ldots + w_n) \leq \max\{v_p(w_1), v_p(w_2), \ldots, v_p(w_n)\}$ dla dowolnych liczb wymiernych w_1, w_2, ..., w_n.

Rozwiązanie zadania. Niech $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ będzie rozwiązaniem (w liczbach wymiernych) układu (1). Wówczas zachodzą równości:

$$\begin{array}{l} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n = 0 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_n + a_{n2}b_2 + \ldots + a_{nn}b_n = 0 \end{array}$$

Niech q_i będzie ilorazem, natomiast r_i resztą z dzielenia a_{ii} przez p, wtedy $a_{ii} = q_i p + r_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Dodając do pierwszej z powyższych równości $(p - r_1)b_1$, do drugiej $(p - r_2)b_2$ itd., do n-tej $(p - r_n)b_n$ otrzymujemy

$$(9)\qquad \begin{array}{l} (p - r_1)b_1 = (a_{11} + p - r_1)b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ (p - r_2)b_2 = a_{21}b_1 + (a_{22} + p - r_2)b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p - r_n)b_n = a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots + (a_{nn} + p - r_n)b_n. \end{array}$$

Rozwiązanie zadania F 275.
Jak w poprzednim zadaniu siła rozszczepiająca wiązkę atomów Li jest równa

$$F = ma = \mu_B \frac{dB}{dx},$$

gdzie a – przyspieszenie, skierowane prostopadle do wektora prędkości, którego długość wynosi $v = (2E_{kin}/m)^{1/2}$. Odchylenie atomów na ekranie w ciągu czasu przelotu przez pole magnetyczne $t_1 = L_1/v$ i odcinka między magnesem a ekranem $t_2 = L_2/v$ wynosi:

$$\Delta = a\frac{t_1^2}{2} + at_1t_2 = at_1(t_1/2 + t_2),$$

a odległość między dwiema wiązkami na ekranie wynosi 2Δ. Geometryczny rozmiar obrazu każdej z wiązek wynosi

$$D_{obr} = D\frac{L_1 + L_2 + L/2}{L/2}.$$

Na podstawie warunku $D_{obr} < \Delta$ i $L_2 \gg L_1$ otrzymujemy

$$D < \frac{\mu_B dB/dx}{2E_{kin}} LL_1 \approx 0,9\ \mathrm{cm}.$$

Oto szkic rozumowania bezpośredniego, podobnego do przedstawionego w artykule. Jeżeli nasz układ równań ma rozwiązanie wymierne, to ma też rozwiązanie złożone z samych liczb całkowitych (wystarczy pomnożyć rozwiązanie wymierne przez wspólny mianownik występujących w nim liczb). Podstawiając to rozwiązanie do równań układu stwierdzamy, że $a_{ii}x_i$, dla wszystkich i, dzieli się przez p. Zatem przez p dzielą się wszystkie x_i. Z jednorodności układu wynika więc, że po podzieleniu rozwiązania przez p otrzymamy znowu całkowite rozwiązanie układu. Na mocy poprzedniego rozumowania znów wszystkie występujące w nim liczby dzielą się przez p, więc możemy je podzielić przez p itd. dowolną liczbę razy. Zważywszy, że układ $(0,\dots,0)$ jest jedynym układem liczb całkowitych, który można dzielić przez daną liczbę dowolnie wiele razy, otrzymujemy żądany wynik.

Wszystkie współczynniki przy b_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ po prawych stronach równości (9) dzielą się przez p. Istnieją więc takie liczby całkowite c_{ij} $(i = 1, 2, \dots, n,$ $j = 1, 2, \dots, n)$, że

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
(p - r_1)b_1 &= p(c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \ldots + c_{1n}b_n)\\
(p - r_2)b_2 &= p(c_{21}b_1 + c_{22}b_2 + \ldots + c_{2n}b_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(p - r_n)b_n &= p(c_{n1}b_1 + c_{n2}b_2 + \ldots + c_{nn}b_n)\,.
\end{aligned}
$$

Bez zmniejszania ogólności można przyjąć, że $\max\{v_p(b_1), v_p(b_2), \dots, v_p(b_n)\} = v_p(b_1)$. Z pierwszej równości układu (10) mamy

$$
(11)\qquad v_p(p - r_1)v_p(b_1) = v_p(p)v_p(c_{11}b_1 + c_{12}b_2 + \ldots + c_{1n}b_n)\,.
$$

Korzystając kolejno z własności (8), (5), (4) funkcji v_p i uwzględniając to, że $v_p(p) = \frac{1}{p}$ oraz $v_p(p - r_1) = 1$ (bo p nie dzieli $p - r_1$), z równości (11) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
v_p(b_1) &\le \frac{1}{p}\max\left\{v_p(c_{11}b_1), v_p(c_{12}b_2), \dots, v_p(c_{1n}b_n)\right\} =\\
&= \frac{1}{p}\max\left\{v_p(c_{11})v_p(b_1), v_p(c_{12})v_p(b_2), \dots, v_p(c_{1n})v_p(b_n)\right\} \le\\
&\le \frac{1}{p}\max\left\{v_p(b_1), v_p(b_2), \dots, v_p(b_n)\right\} \le \frac{1}{p}v_p(b_1)\,.
\end{aligned}
$$

Z otrzymanej nierówności mamy $v_p(b_1) = 0$.
Ponieważ $v_p(b_1) = \max\left\{v_p(b_1), v_p(b_2), \dots, v_p(b_n)\right\}$,
więc $v_p(b_1) = v_p(b_2) = \ldots = v_p(b_n) = 0$.
Stąd wobec (7) wynika, że $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.

Patrz w niebo

Nie od dziś wiemy, że galaktyki grupują się w gromadach galaktyk. Ale co to właściwie znaczy? Czy zgrupowania galaktyk to tylko nasze wrażenie czy fakt obiektywny?

Wyobraźmy sobie, że na pokratkowany arkusz papieru (niech tam będzie k kratek) rzucamy losowo N punktów. Prawdopodobieństwo, że jeden punkt trafi do określonej kratki, wynosi $1/k$, a że nie trafi $1 - 1/k$. Prawdopodobieństwo, że w tej kratce znajdzie się n punktów, będzie proporcjonalne do $\left(\frac{1}{k}\right)^n\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{N-n}$, bo jednocześnie $N - n$ punktów musi znaleźć się poza tą kratką. Ale stan taki może zostać zrealizowany na tyle sposobów, na ile można wybrać n elementów spośród N, czyli $\binom{N}{n}$. Ostatecznie więc prawdopodobieństwo, że w kratce znajdzie się dokładnie n punktów, wynosi

$$
p(n) = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{k}\right)^n\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{N-n}.
$$

Jest to tzw. rozkład Bernoulliego. Przewiduje on, że rozrzut (dyspersja) liczebności punktów w kratkach powinien wynosić

$$
\sigma_0 = \sqrt{N\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)}\,.
$$

Tymczasem w rzeczywistości tak być nie musi. Jeżeli dyspersja obserwowana

$$
\sigma = \sqrt{\frac{1}{k}\Sigma\left(n_i - \frac{N}{k}\right)^2}
$$

jest mniejsza od teoretycznej, to oznacza, że rozkład punktów (galaktyk) jest sztucznie wygładzony, jeżeli zaś większa, to są dwie możliwości: albo realne są gromady galaktyk, albo rozrzedzenia między nimi.

Zdawałoby się, że oczywista jest możliwość pierwsza – gromady galaktyk przecież po prostu widać. Wiele z nich liczy tysiące członków, ma elegancką sferyczną symetrię i jakby dla zaznaczenia swojej obecności jedną lub kilka szczególnie wielkich galaktyk w centrum. Gromady galaktyk są niewątpliwie największymi „cegiełkami" materii obdarzonymi wyraźną indywidualnością.

Ale okazuje się, że wszystko zależy od skali, w jakiej obserwuje się rozkład galaktyk. Obecność supergromad (tzn. gromad gromad) galaktyk już nie jest tak powszechna, a w jeszcze większej skali z zaskoczeniem zaobserwowano wyraźne rozrzedzenia. Zauważono, że gromady galaktyk gdzieniegdzie tworzą jakby ogromne włókna rozmieszczone w niemal pustej poza tym przestrzeni. Oczywiście, trzeba pamiętać, że to, co widzimy na niebie, jest rzutem rozkładu przestrzennego, a zatem w rzeczywistości świecąca materia (gromad galaktyk) rozmieszczona byłaby w gigantycznych płatach otaczających bąble pustej przestrzeni (voidy). Całość przypominałaby kosmicznych rozmiarów pianę.

Sprawa wielkoskalowego rozmieszczenia materii we Wszechświecie jest daleka od ostatecznego rozwiązania, a przyczyna częściowo tkwi w tym, że niekiedy jest bardzo trudno odpowiedzieć na pozornie banalne pytanie: co właściwie widzimy – zgęszczenia czy dziury?

dr Tomasz KWAST