

Dr hab. Ryszard KUTNER

Ze słownika wyrazów obcych PWN dowiadujemy się, że słowo **bifurkacja** pochodzi od łacińskiego **bifurcus** (=rozdwójony, rosochaty) i oznacza rozdwojenie się czegoś, rozdzielenie, rozgałęzienie lub rozszczepienie. W geologii mówi się np. o bifurkacjach rzeki lub pasm górskich.

W tym artykule zajmiemy się bifurkacjami od strony numerycznej, a przybliżymy to pojęcie posługując się historyjką obrazkową. Będziemy badać rozwiązania pewnego układu nieliniowych równań różniczkowych. Okaże się, że rozwiązania te – pokażemy je w naszej historyjce obrazkowej – będą jakościowo silnie zależące od wartości parametrów występujących w równaniach. Pojawiające się niestabilności rozwiązania nazywać będziemy bifurkacjami.

Zajmiemy się układem równań różniczkowych przedstawiającym tzw. atraktor Rösslera (o fizyce nieliniowej i atraktorach była już mowa w poprzednich numerach *Delty*: 9 i 11/1988 oraz 2 i 4/1989). Jest to układ trzech sprzężonych ze sobą, nieliniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$(*) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + ex_2, \\ \frac{dx_3}{dt} = f + x_1x_3 - \mu x_3, \end{cases}$$

gdzie e, f, μ są parametrami danymi z zewnątrz. Ponadto, jak w każdym tego typu problemie, układ równań różniczkowych uzupełniamy o warunki początkowe postaci: $x_1(t=0) = q_1, x_2(t=0) = q_2, x_3(t=0) = q_3$, gdzie q_1, q_2 i q_3 są ustalonymi przez nas wartościami. Proszę zwrócić uwagę, jak mało interesujący byłby nasz układ równań (*), gdybyśmy usunęli w trzecim równaniu wyraz mieszany postaci x_1x_3 . Byłby to wtedy dobrze znany liniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych. Dodanie wyrazu x_1x_3 powoduje, że układ równań (*) nie da się już ściśle rozwiązać – pozostaje nam więc tylko droga numeryczna. Na tej właśnie drodze odkryjemy zaskakujące bogactwo postaci rozwiązań układu równań (*). Posłużymy się w tym celu załączonym programem komputerowym. Jest to program przystosowany do pracy na popularnym komputerze ZX Spectrum 48K i zgodnych z nim, jak Timex czy też Elwro 800 Junior. Umożliwi on również wykonanie rysunków przedstawiających dwuwymiarowe projekcje rozwiązań układu równań (*).

A zatem rozpoczynamy naszą historyjkę obrazkową.

```

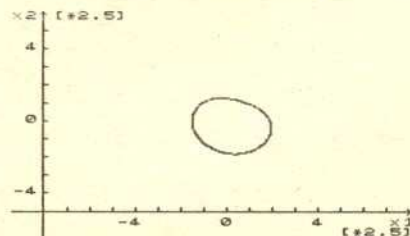
4000  *****
4010  *****
4020  *****
4030  *****
4040  *****
4050  *****
4060  *****
4070  *****
4080  *****
4090  *****
4100  *****
4110  *****
4120  *****
4130  *****
4140  *****
4150  *****
4160  *****
4170  *****
4180  *****
4190  *****
4200  *****
4210  *****
4220  *****
4230  *****
4240  *****
4250  *****
4260  *****
4270  *****
4280  *****
4290  *****
4300  *****
4310  *****
4320  *****
4330  *****
4340  *****
4350  *****
4360  *****
4370  *****
4380  *****
4390  *****
4400  *****
4410  *****
4420  *****
4430  *****
4440  *****
4450  *****
4460  *****
4470  *****
4480  *****
4490  *****
4500  *****
4510  *****
4520  *****
4530  *****
4540  *****
4550  *****
4560  *****
4570  *****
4580  *****
4590  *****
4600  *****
4610  *****
4620  *****
4630  *****
4640  *****
4650  *****
4660  *****
4670  *****
4680  *****
4690  *****
4700  *****
4710  *****
4720  *****
4730  *****
4740  *****
4750  *****
4760  *****
4770  *****
4780  *****
4790  *****
4800  *****
4810  *****
4820  *****
4830  *****
4840  *****
4850  *****
4860  *****
4870  *****
4880  *****
4890  *****
4900  *****
4910  *****
4920  *****
4930  *****
4940  *****
4950  *****
4960  *****
4970  *****
4980  *****
4990  *****
5000  *****
5010  *****
5020  *****
5030  *****
5040  *****
5050  *****
5060  *****
5070  *****
5080  *****
5090  *****
5100  *****
5110  *****
5120  *****
5130  *****
5140  *****
5150  *****
5160  *****
5170  *****
5180  *****
5190  *****
5200  *****
5210  *****
5220  *****
5230  *****
5240  *****
5250  *****
5260  *****
5270  *****
5280  *****
5290  *****
5300  *****
5310  *****
5320  *****
5330  *****
5340  *****
5350  *****
5360  *****
5370  *****
5380  *****
5390  *****
5400  *****
5410  *****
5420  *****
5430  *****
5440  *****
5450  *****
5460  *****
5470  *****
5480  *****
5490  *****
5500  *****
5510  *****
5520  *****
5530  *****
5540  *****
5550  *****
5560  *****
5570  *****
5580  *****
5590  *****
5600  *****
5610  *****
5620  *****
5630  *****
5640  *****
5650  *****
5660  *****
5670  *****
5680  *****
5690  *****
5700  *****
5710  *****
5720  *****
5730  *****
5740  *****
5750  *****
5760  *****
5770  *****
5780  *****
5790  *****
5800  *****
5810  *****
5820  *****
5830  *****
5840  *****
5850  *****
5860  *****
5870  *****
5880  *****
5890  *****
5900  *****
5910  *****
5920  *****
5930  *****
5940  *****
5950  *****
5960  *****
5970  *****
5980  *****
5990  *****
6000  *****
6010  *****
6020  *****
6030  *****
6040  *****
6050  *****
6060  *****
6070  *****
6080  *****
6090  *****
6100  *****
6110  *****
6120  *****
6130  *****
6140  *****
6150  *****
6160  *****
6170  *****
6180  *****
6190  *****
6200  *****
6210  *****
6220  *****
6230  *****
6240  *****
6250  *****
6260  *****
6270  *****
6280  *****
6290  *****
6300  *****
6310  *****
6320  *****
6330  *****
6340  *****
6350  *****
6360  *****
6370  *****
6380  *****
6390  *****
6400  *****
6410  *****
6420  *****
6430  *****
6440  *****
6450  *****
6460  *****
6470  *****
6480  *****
6490  *****
6500  *****
6510  *****
6520  *****
6530  *****
6540  *****
6550  *****
6560  *****
6570  *****
6580  *****
6590  *****
6600  *****
6610  *****
6620  *****
6630  *****
6640  *****
6650  *****
6660  *****
6670  *****
6680  *****
6690  *****
6700  *****
6710  *****
6720  *****
6730  *****
6740  *****
6750  *****
6760  *****
6770  *****
6780  *****
6790  *****
6800  *****
6810  *****
6820  *****
6830  *****
6840  *****
6850  *****
6860  *****
6870  *****
6880  *****
6890  *****
6900  *****
6910  *****
6920  *****
6930  *****
6940  *****
6950  *****
6960  *****
6970  *****
6980  *****
6990  *****
7000  *****
7010  *****
7020  *****
7030  *****
7040  *****
7050  *****
7060  *****
7070  *****
7080  *****
7090  *****
7100  *****
7110  *****
7120  *****
7130  *****
7140  *****
7150  *****
7160  *****
7170  *****
7180  *****
7190  *****
7200  *****
7210  *****
7220  *****
7230  *****
7240  *****
7250  *****
7260  *****
7270  *****
7280  *****
7290  *****
7300  *****
7310  *****
7320  *****
7330  *****
7340  *****
7350  *****
7360  *****
7370  *****
7380  *****
7390  *****
7400  *****
7410  *****
7420  *****
7430  *****
7440  *****
7450  *****
7460  *****
7470  *****
7480  *****
7490  *****
7500  *****
7510  *****
7520  *****
7530  *****
7540  *****
7550  *****
7560  *****
7570  *****
7580  *****
7590  *****
7600  *****
7610  *****
7620  *****
7630  *****
7640  *****
7650  *****
7660  *****
7670  *****
7680  *****
7690  *****
7700  *****
7710  *****
7720  *****
7730  *****
7740  *****
7750  *****
7760  *****
7770  *****
7780  *****
7790  *****
7800  *****
7810  *****
7820  *****
7830  *****
7840  *****
7850  *****
7860  *****
7870  *****
7880  *****
7890  *****
7900  *****
7910  *****
7920  *****
7930  *****
7940  *****
7950  *****
7960  *****
7970  *****
7980  *****
7990  *****
8000  *****
8010  *****
8020  *****
8030  *****
8040  *****
8050  *****
8060  *****
8070  *****
8080  *****
8090  *****
8100  *****
8110  *****
8120  *****
8130  *****
8140  *****
8150  *****
8160  *****
8170  *****
8180  *****
8190  *****
8200  *****
8210  *****
8220  *****
8230  *****
8240  *****
8250  *****
8260  *****
8270  *****
8280  *****
8290  *****
8300  *****
8310  *****
8320  *****
8330  *****
8340  *****
8350  *****
8360  *****
8370  *****
8380  *****
8390  *****
8400  *****
8410  *****
8420  *****
8430  *****
8440  *****
8450  *****
8460  *****
8470  *****
8480  *****
8490  *****
8500  *****
8510  *****
8520  *****
8530  *****
8540  *****
8550  *****
8560  *****
8570  *****
8580  *****
8590  *****
8600  *****
8610  *****
8620  *****
8630  *****
8640  *****
8650  *****
8660  *****
8670  *****
8680  *****
8690  *****
8700  *****
8710  *****
8720  *****
8730  *****
8740  *****
8750  *****
8760  *****
8770  *****
8780  *****
8790  *****
8800  *****
8810  *****
8820  *****
8830  *****
8840  *****
8850  *****
8860  *****
8870  *****
8880  *****
8890  *****
8900  *****
8910  *****
8920  *****
8930  *****
8940  *****
8950  *****
8960  *****
8970  *****
8980  *****
8990  *****
9000  *****
9010  *****
9020  *****
9030  *****
9040  *****
9050  *****
9060  *****
9070  *****
9080  *****
9090  *****
9100  *****
9110  *****
9120  *****
9130  *****
9140  *****
9150  *****
9160  *****
9170  *****
9180  *****
9190  *****
9200  *****
9210  *****
9220  *****
9230  *****
9240  *****
9250  *****
9260  *****
9270  *****
9280  *****
9290  *****
9300  *****
9310  *****
9320  *****
9330  *****
9340  *****
9350  *****
9360  *****
9370  *****
9380  *****
9390  *****
9400  *****
9410  *****
9420  *****
9430  *****
9440  *****
9450  *****
9460  *****
9470  *****
9480  *****
9490  *****
9500  *****
9510  *****
9520  *****
9530  *****
9540  *****
9550  *****
9560  *****
9570  *****
9580  *****
9590  *****
9600  *****
9610  *****
9620  *****
9630  *****
9640  *****
9650  *****
9660  *****
9670  *****
9680  *****
9690  *****
9700  *****
9710  *****
9720  *****
9730  *****
9740  *****
9750  *****
9760  *****
9770  *****
9780  *****
9790  *****
9800  *****
9810  *****
9820  *****
9830  *****
9840  *****
9850  *****
9860  *****
9870  *****
9880  *****
9890  *****
9900  *****
9910  *****
9920  *****
9930  *****
9940  *****
9950  *****
9960  *****
9970  *****
9980  *****
9990  *****

```

```

Projekcja ATRAKTORA ROSSLERA
Parametry atraktora
parametr e=0.00
parametr f=0.00
parametr mu=2.00
Uspórzędne początkowe
Uspótrn x1=0.00
Uspótrn x2=0.00
Uspótrn x3=0.00
Całkowita liczba kroków czasu
nk=2500
Czynnik skalujący osie
s=2.5

```

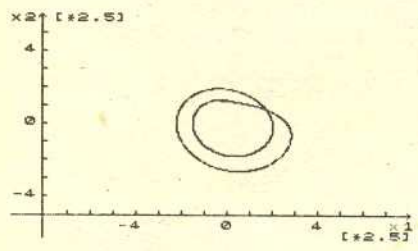


Figs. a

```

Projekcja ATRAKTORA ROSSLERA
Parametry atraktora
Parametr e = 0.0
Parametr f = 0.0
Parametr m = 0.5
Uspórzędne początkowe
Uspórzędna x1 = 0.0
Uspórzędna x2 = 0.0
Uspórzędna x3 = 0.0
Całkowita liczba kroków czasu
nk=2500
Czynnik skalujący osie
s=2.5

```

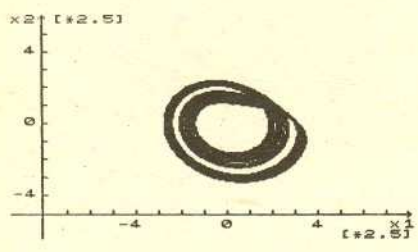


Rys. b

```

Projekcja ATRAKTORA ROSSLERA
Parametry atraktora
Parametr e = 0.0
Parametr f = 0.0
Parametr m = 4.0
Uspórzędne początkowe
Uspórzędna x1 = 0.0
Uspórzędna x2 = 0.0
Uspórzędna x3 = 0.0
Całkowita liczba kroków czasu
nk=125000
Czynnik skalujący osie
s=2.5

```

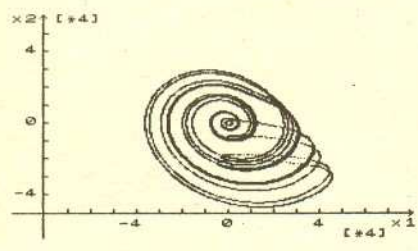


Rys. c

```

Projekcja ATRAKTORA ROSSLERA
Parametry atraktora
Parametr e = 0.3
Parametr f = 0.4
Parametr m = 0.5
Uspórzędne początkowe
Uspórzędna x1 = 0.0
Uspórzędna x2 = 0.0
Uspórzędna x3 = 0.0
Całkowita liczba kroków czasu
nk=125000
Czynnik skalujący osie
s=4

```



Rys. d

Na rysunku a przedstawiona jest prosta trajektoria cykliczna na płaszczyźnie $(x_1, x_2, 0)$. Aby prześledzić jej powstanie, wystarczy uruchomić załączony program komputerowy wprowadzając podane ponad rysunkiem wartości parametrów, warunki początkowe oraz całkowitą liczbę elementarnych kroków czasowych. Tak powstała trajektoria jest rozwiązaniem numerycznym układu równań (*) i stanowi punkt wyjścia cyklu obrazków zamieszczonych na rysunkach a – d.

Na rysunku b przedstawiona jest już inna trajektoria cykliczna, jak widać, o strukturze bardziej skomplikowanej – podwójnie zapętłonej. Proszę zauważyć, że komplikacja została spowodowana zmianą tylko jednego parametru μ (w programie: m). W dalszym ciągu, dla uproszczenia, będziemy zwiększać właśnie ten jeden parametr.

Możesz, Czytelniku, sam sprawdzić, że istnieje taka „krytyczna” wartość parametru $\mu = \mu_k \approx 4,2$, że dla $\mu > \mu_k$ rozwiązanie zmienia swój charakter tworząc pasma, jak pokazuje rysunek c. W trakcie powstawania tego obrazka można zaobserwować, jak bardzo poplątana, by nie rzec chaotyczna, jest trajektoria wewnątrz każdego z pasm.

Na koniec przyjrzymy się jeszcze rysunkowi d, który powstał w wyniku zmiany wszystkich trzech parametrów. Jest to tzw. dziwny atraktor Rösslera, a ściślej rzecz biorąc jego dwuwymiarowa projekcja (często mówiąc o atraktorze Rösslera ma się na myśli właśnie ten twór, a nie układ równań różniczkowych (*)). Jak widać, struktura rozwiązania przedstawionego na rysunku d charakteryzująca się pofałdowaniem i splątaniem trajektorii, jest krańcowo różna od naszego wyjściowego, prymitywnego rozwiązania z rysunku a. Przedstawione rysunki ilustrują właśnie efekt bifurkacji, tzn. **jakościową** zmianę rozwiązania wraz ze zmianą wartości parametrów charakteryzujących dany układ. Bifurkujące rozwiązania równań różniczkowych (zwykłych lub cząstkowych) to nie tylko ciekawostka matematyczna. Pojawiają się one także w różnych modelach fizycznych, na przykład w hydrodynamice i aerodynamice zagadnień turbulentnych. Trzeba podkreślić, że droga do opisu ruchów turbulentnych poprzez bifurkacje i dziwne atraktory znajduje dzisiaj swoich zwolenników zarówno wśród matematyków, jak i fizyków. Są to wszystkie problemy „gorące”, właśnie badane nie tylko metodami czysto teoretycznymi, ale także na drodze eksperymentów komputerowych, podobnych również do zamieszczonych w tym artykule. Zachęcam do wzięcia w nich udziału.

Wybrany przez nas przykład atraktora Rösslera dotyczy tzw. zagadnień dyssypatywnych (o których mówiliśmy nieco przy omawianiu dziwnych atraktorów w *Delcie* 4/1988). Okazuje się, że efekt bifurkacji występuje także w tzw. układach konserwatywnych. Ale to już całkiem inna historia. A może, w formie ćwiczenia spróbujesz, Czytelniku, sam napisać program kreślący np. trajektorie w przestrzeni fazowej punktu materialnego podlegającego np. działaniu siły zależnej liniowo oraz kubicznie od jego wychylenia z położenia równowagi. Jako pomocną pozycję literaturową mogę tutaj polecić pracę przeglądową R.H.G. Hellemana pt.: „Self – generated chaotic behavior in nonlinear mechanics” zamieszczoną w *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, tom V, red. E.G.D. Cohen, North-Holland, 1980.