

Na komecie Halleya chyba wszyscy zawiedliśmy się, trudno więc reklamować zbliżanie się innej, która nie ma takiej sławy. Niemniej jednak od lipca do września można będzie próbować zaobserwować komętę okresową Brorsena-Metcalfa, która – jak oceniają niektórzy – powinna być widoczna nawet gołym okiem.

Kometę odkrył niemiecki astronom Theodor Brorsen w 1847 r. Na podstawie obserwacji wykonanych podówczas jej orbita została wyznaczona niezbyt pewnie, ponieważ kometa była widoczna zaledwie przez dwa miesiące. W rezultacie nie było nawet pewności, czy jest komętą okresową czy nie. Ale w 1919 r. odkrył ją ponownie pastor Joel Metcalf z USA, oczywiście z początku nie wiedząc, że jest to ta sama kometa.

Obecnie zbliża się jej trzecie udokumentowane przejście przez perihelium, co ma nastąpić 27 IX 1989. Elementy orbity komety są następujące:

półos	$a = 17,080$ j.a.
mimośród	$e = 0,972$
nachylenie	$i = 19,333$
długość węzła	$\Omega = 310,872$
położenie perihelium	$\omega = 129,633$

## Klub 44

### Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

Szczegółowy regulamin Klubu 44 zamieściliśmy w *Delcie* 1/1989, a jego skrót – we wszystkich numerach, w których są zadania ligowe (tj. z wyjątkiem numerów 6 i 7).

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1989

Przypominamy treść zadań:

**187.** Dana jest krzywa  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ;  $t \in \langle 0; 1 \rangle$ ,  $\varphi(0) = \psi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = \psi(1) = 1$ ;  $\varphi, \psi$  ciągle, niemalejące. Czy istnieje 10 prostokątów o bokach równoległych do osi układu, każdy o polu  $\leq 1/100$ , łącznie pokrywających daną krzywą?

**188.** Rozważamy ciąg  $(x_n)$ :  $x_{n+1} = |x_n - 2^{-n}|$ ;  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Przedyskutować zbieżność, wyznaczyć granicę.

**187.** Istnieją takie prostokąty. Interpretujemy zmienną  $t$  jako czas. Określamy ciąg położenia ruchomego punktu  $P_t = (\varphi(t), \psi(t))$  przebiegającego daną krzywą tak, by każde dwa kolejne położenia były przeciwległymi wierzchołkami prostokąta o bokach równoległych do osi i o polu  $1/100$  (istnienie takich położenia wynika z ciągłości  $\varphi$  i  $\psi$ ); przedłużamy przy tym naszą krzywą przyjmując na przykład, że po chwili  $t = 1$  ruch odbywa się prostoliniowo:  $\varphi(t) = \psi(t) = t$  dla  $t \geq 1$ . Momenty  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , wyznaczające te położenia, możemy określić indukcyjnie wzorami:

$$t_0 = 0, \quad t_k = \sup \left\{ t : (\varphi(t) - \varphi(t_{k-1}))(\psi(t) - \psi(t_{k-1})) \leq \frac{1}{100} \right\}.$$

Niech  $R_k$  będzie prostokątem, którego dwoma wierzchołkami są punkty  $P_{t_{k-1}}$  i  $P_{t_k}$ . Długości boków  $R_k$  (poziomego i pionowego) oznaczamy odpowiednio przez  $a_k$  i  $b_k$ . Zatem  $a_k b_k = 1/100$ . Wykażemy, że

$$R_1 \cup \dots \cup R_{10} \supset \{P_t : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Gdyby tak nie było, znaczyliby to, że  $\sum a_k \leq 1$  oraz  $\sum b_k \leq 1$  (sumowanie, tu i dalej, po  $k$  od 1 do 10), przy czym co najmniej jedna z tych nierówności jest ostra. Na mocy nierówności Cauchy'ego-Schwarza mielibyśmy wtedy  $\sum \sqrt{a_k b_k} \leq \sqrt{\sum a_k} \sqrt{\sum b_k} < 1$  – sprzeczność, bowiem  $\sum \sqrt{a_k b_k} = 10\sqrt{1/100} = 1$ . To kończy dowód.

**188.** Gdy  $x_0 \leq 0$ , wówczas  $x_1 = 1 - x_0 \geq 1$ . Gdy  $x_0 \geq 2$ , wówczas  $x_1 = x_0 - 1 \geq 1$ . W obu tych przypadkach dostajemy następnie przez łatwą indukcję zależności:

$$x_n \geq 2 \cdot 2^{-n}, \quad x_{n+1} = x_n - 2^{-n} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Stąd 
$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = x_1 - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}.$$

Istnieje więc granica

$$\lim x_n = x_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = x_1 - 1 = \begin{cases} -x_0 & \text{dla } x_0 \leq 0, \\ x_0 - 2 & \text{dla } x_0 \geq 2. \end{cases}$$

Gdy natomiast  $0 \leq x_0 \leq 2$ , indukcja pokazuje, że

$$0 \leq x_n \leq 2 \cdot 2^{-n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Zatem 
$$\lim x_n = 0 \quad \text{dla } 0 \leq x_0 \leq 2.$$

Otrzymane wyniki można zapisać jednolitym wzorem

$$\lim x_n = \frac{1}{2} (|x_0| + |x_0 - 2|) - 1.$$

#### Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 79 (WT=1,27) i 80 (WT=2,36) z numeru 12/1988

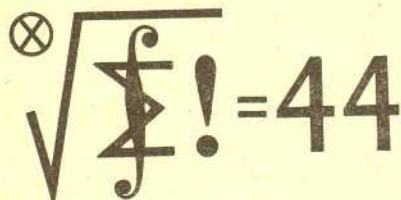
Paweł Perkowski	- Szczecin	42,61 pkt
Roman Musiał	- Katowice	41,03 pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	40,56 pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	35,73 pkt
Aleksander Surma	- Myszków	34,08 pkt
Dzieryśław Lipniacki	- Lublin	33,62 pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	31,08 pkt
Tomasz Więtecha	- Tarnów	28,41 pkt
Mariusz Bogacz	- Pińczów	25,60 pkt
Marek Karaf	- Tarnów	24,13 pkt

#### Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 181 (WT=1,61) i 182 (WT=2,01) z numeru 12/1988

Zbigniew Surduka	- Czechowice	47,33 pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	42,72 pkt
Jerzy Małopolski	- Kraków	40,86 pkt
Andrzej Krzysztofowicz	- Gdańsk	39,01 pkt
Dariusz Rybacki	- Krafnik	38,49 pkt
Andrzej Szymczak	- Gdańsk	37,73 pkt

Numer 59 w Klubie 44(M):  
Pan Z. Surduka.





Jak widać, kometa wraca do Słońca co  $a\sqrt{a} = 70,6$  lat i ma orbitę rzeczywiście bardzo wydłużoną.

Pod koniec lipca kometa znajdzie się w Pegazie i będzie być może widoczna wieczorami nad wschodnim horyzontem, ale jako obiekt dość słaby (około 8 mag). Następnie przeleci przez Andromedę do Perseusza i w połowie sierpnia może być widoczna też wieczorami nad północnwschodnim horyzontem (jasność 6 mag). Na przełomie sierpnia i września będzie między Woźnicą a Rysiem, a więc wieczorami dość nisko nad północnym horyzontem (jasność 5,5 mag), po czym przestanie być widoczna wprawdzie w powodu bliskości Słońca, a później z powodu coraz niższej deklinacji. Oczywiście, w okresie jej widoczności lepiej będzie ją widać, tzn. wyżej na niebie, gdy nie poprzestanie się na obserwacjach wieczornych, a poczeka się do drugiej połowy nocy. Wspomniane tu gwiazdozbiory znajdują się wtedy wysoko.

Najbliżej Ziemi kometa Brorsena-Metcalfa znajdzie się około 20 VIII, maksymalną zaś jasność (ocenianą na 4,7 mag) osiągnie prawdopodobnie w połowie września, ale – jak mówiliśmy – jej warunki widoczności będą już dla nas niekorzystne.

A w ogóle jasność komety bardzo trudno jest przewidzieć i przewidywania takie rzadko się zgadzają ze stanem faktycznym. Równie dobrze kometa może okazać się słabsza, jak i jaśniejsza niż się przewiduje – a więc próbujmy.

## Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delfi”

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

### Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1989

Przypominamy treść zadań:

**85.** W płaskim kondensatorze jedna z dwu poziomych okładek o powierzchni  $S$  jest zawieszona na czterech jednakowych sprężynkach o współczynniku sprężystości  $k$  nad drugą, nieruchomą okładką znajdującą się w odległości  $d_0$ . Kondensator ładujemy impulsowo do napięcia  $U$ . Przy jakiej wartości  $U$  nastąpi zetknięcie się okładek?

**86.** Gejzer mający duży, podziemny zbiornik wody nagrzewany ciepłem Ziemi oraz wąski kanał łączący ten zbiornik z powierzchnią Ziemi (rys. 1) wykazuje okresową aktywność. Podczas okresu spokojnego zbiornik oraz kanał są w całości wypełnione wodą. Z chwilą, gdy woda w podziemnym zbiorniku osiągnie temperaturę wrzenia, zaczyna się aktywny okres gejzera. Przyjmując, że podczas trwania tego okresu cały kanał wypełnia uchodząca na zewnątrz para wodna, oszacować, jaka część wody zawartej początkowo w zbiorniku gejzera ulega wyrzuceniu w postaci pary, jeśli kanał ma głębokość  $h = 100$  m. Przybliżone wartości ciepła parowania oraz ciepła właściwego wody wynoszą odpowiednio  $r = 2 \cdot 10^6$  J/kg oraz  $c = 4 \cdot 10^3$  J/(kg·K). Na rysunku 2 przedstawiono zależność ciśnienia nasyconej pary wodnej od temperatury.

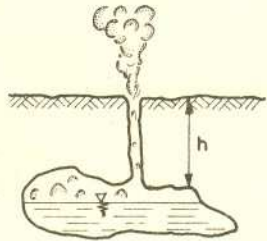
**85.** Pojemność kondensatora w chwili ładowania jest równa  $C = \epsilon_0 S/d_0$  ( $\epsilon_0$  – przenikalność elektryczna próżni). Po naładowaniu do napięcia  $U$  każda z okładek kondensatora zawiera ładunek o wartości bezwzględnej  $q = \epsilon_0 S U/d_0$  i gęstości powierzchniowej  $\sigma = q/S = \epsilon_0 U/d_0$ . Górna okładka znajduje się w wytworzonym przez ładunek dolnej okładki polu elektrycznym o natężeniu  $E = \sigma/(2\epsilon_0) = U/(2d_0)$  (zaniedbujemy efekty brzegowe, przyjmując  $S \gg d_0^2$ ), jest zatem przyciągana siłą  $F = qE$ . Siła ta nie zmienia się ze zmianą odległości okładek. Powoduje ona przesunięcie równowagowego położenia okładki o  $h$  względem położenia pierwotnego (rys. 3). Po naładowaniu górna okładka zostanie więc wprawiona w drgania harmoniczne o amplitudzie  $h$  wokół nowego położenia równowagi. Dopóki spełniona będzie nierówność

$$(*) \quad h < d_0/2,$$

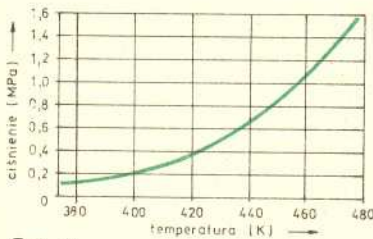
nie nastąpi zetknięcie się okładek podczas drgań. Początkowe wydłużenie sprężyn wynosi  $\Delta l = P/(4k)$ , gdzie  $P$  jest ciężarem górnej płyty. Podobnie mamy  $\Delta l + h = (P + F)/(4k)$ . Stąd wynika  $h = F/(4k)$ . Nierówność (\*) przyjmuje teraz postać  $F/(4k) < d_0/2$ , czyli  $k > F/(2d_0) = \epsilon_0 S U^2/(4d_0^3)$ . Zetknięcie się okładek nastąpi, gdy nierówność ta nie będzie spełniona, a więc dla  $U \geq 2\sqrt{k d_0^3/(\epsilon_0 S)}$ .

**86.** Aktywny okres gejzera zaczyna się, gdy woda w zbiorniku osiąga temperaturę wrzenia odpowiadającą ciśnieniu panującemu przy dolnym ujściu kanału, a więc  $p_0 + \rho g h \approx 1$  MPa ( $p_0$  – ciśnienie atmosferyczne,  $\rho$  – gęstość wody,  $g$  – przyspieszenie ziemskie). Z wykresu (rys. 2) odczytujemy wartość tej temperatury:  $T_1 = 453$  K. Powstająca para wodna wyrzuca wodę z kanału, na skutek czego ciśnienie w zbiorniku gwałtownie spada do wartości  $p_0$ , której odpowiada temperatura wrzenia  $T_2 = 373$  K. Wrzenie wody zachodzi tak długo, dopóki temperatura wody nie spadnie do wartości  $T_2$ . Proces wrzenia odbywa się kosztem energii wewnętrznej wody; ponieważ – jak podano – trwa on krótko, możemy zaniedbać dopływ energii w postaci ciepła z zewnątrz. Oznaczając przez  $M$  pierwotną masę wody w zbiorniku, a przez  $m$  masę wody, która odparuje i ujdzie przez kanał, możemy napisać przybliżone równanie bilansu cieplnego:  $mr = (M - m/2)c(T_1 - T_2)$ . Stąd otrzymujemy

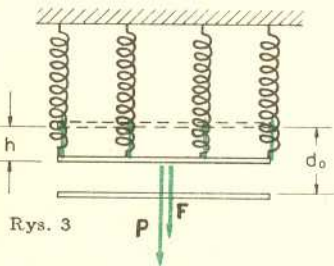
$$\frac{m}{M} = \frac{2c(T_1 - T_2)}{2r + c(T_1 - T_2)} \approx 0,15.$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

