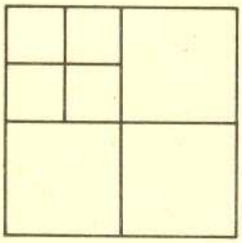
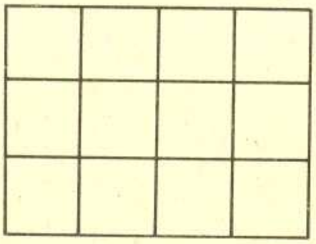
O podziale prostokąta na kwadraty

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Dwa odcinki a i b nazywamy współmiernymi, jeśli istnieje odcinek c, który mieści się całkowitą liczbę razy w obu odcinkach, lub inaczej, gdy stosunek $a : b$ jest liczbą wymierną.



Rys. 1



Rys. 2

Oto łamigłówka, której autorem jest R.L. Brooks: wytnij Czytelniku 13 różnych kwadratów o bokach 3, 5, 9, 11, 14, 19, 20, 24, 31, 33, 36, 39, 42 i ułóż z nich prostokąt (istnieją dwa różne ułożenia – rozwiązania na ostatniej stronie okładki).

Oto, pokrótce, historia problemu.

Oczywiście, każdy kwadrat można rozłożyć na mniejsze kwadraty (rys. 1), prostokąt zaś o bokach współmiernych, np. 3 i 4, daje się zbudować z pewnej liczby jednakowych kwadratów (rys. 2) – są to rozkłady trywialne. Przez wiele lat nie znano żadnego przykładu rozkładu prostokąta (z kwadratami było jeszcze trudniej) na skończoną liczbę różnych między sobą kwadratów. Takie rozkłady prostokąta będziemy nazywać rozkładami doskonałymi.

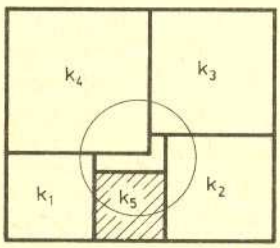
W 1903 roku M. Dehn rozważając pewne równania liniowe udowodnił

Twierdzenie 1. Prostokąty o bokach niewspółmiernych nie dają się rozłożyć na skończoną liczbę parami różnych kwadratów (nie mają rozkładu doskonałego). (Dowód na przykład w [2] str. 51-67.)

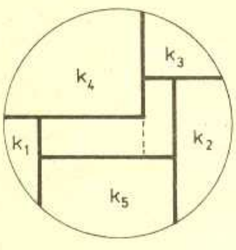
Pierwsze dwa przykłady doskonałych rozkładów wskazał Z. Moroń w 1925 roku – rysunki 3 i 4 na ostatniej stronie okładki. W latach 1936–1938 czterech amerykańskich studentów Trinity College Uniwersytetu w Cambridge, R.L. Brooks, C.A. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, zafascynowanych problemem podziału prostokąta na kwadraty, postanowiło go rozstrzygnąć. Dzięki nim powstała najobszerniejsza i najbogatsza w nowe rezultaty praca [1]. Oto pierwszy wynik z „teorii rozkładów"

Twierdzenie 2. Nie istnieje prostokąt, który w sposób doskonały można rozłożyć na mniej niż 9 kwadratów.

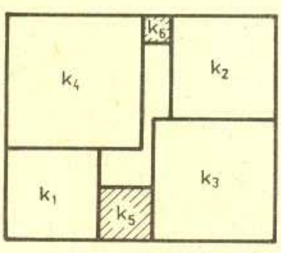
Dowód. Oczywiście, nie możemy zbudować prostokąta z 2 ani z 3 różnych kwadratów. W minimalnym podziale muszą istnieć 4 różne kwadraty narożne (jeden kwadrat nie może zawierać dwóch naroży prostokąta, gdyż po jego odrzuceniu otrzymalibyśmy prostokąt, który można by rozłożyć na mniejszą niż minimalna liczbę kwadratów). Gdyby 4 kwadraty wystarczały, to oznaczając boki kwadratów przez k_1, k_2, k_3, k_4 otrzymujemy: $k_1 + k_2 = k_3 + k_4$, $k_1 + k_3 = k_2 + k_4$, skąd wynika, że $k_1 = k_4$, $k_2 = k_3$ – przeczy to doskonałości rozkładu. Gdy trzy spośród czterech narożnych kwadratów dotykają się, musimy lukę na brzegu wypełnić piątym kwadratem o boku k_5 (rys. 5). We wnętrzu prostokąta powstaje wtedy luka w kształcie litery **L**, której nie można wypełnić dwoma różnymi kwadratami. Rzeczywiście, bok k_5 luki musi przylegać do co najmniej dwóch kwadratów (rys. 6), z których lewy l musiałby być mniejszy od prawego p (dlaczego?). Jest to niemożliwe, gdyż $l = k_4 - k_1$, zaś $p = k_3 - k_2$. Zatem dwa kwadraty nie wypełniają luki. Podobnie można stwierdzić, że trzema różnymi kwadratami również nie wypełnimy tej luki.
Pozostaje przypadek, gdy istnieją dwa różne kwadraty „brzegowe" (oprócz czterech narożnych). Mogą one leżeć tak, jak obrazują to rysunki 7, 8, 9. W każdym z tych przypadków do boku mniejszego kwadratu k_6 muszą przylegać co najmniej dwa różne, mniejsze kwadraty wewnętrzne. W żadnym z tych przypadków nie wystarczą one do pokrycia powstałej luki. Ostatnia sytuacja – istnieją trzy nienarożne kwadraty „brzegowe", czyli łącznie siedem kwadratów zewnętrznych. Najmniejszy z nich musi stykać się z co najmniej dwoma kwadratami wewnętrznymi. Oznacza to, że 8 kwadratów w żadnym przypadku nie wystarcza na wypełnienie prostokąta, a to kończy dowód.



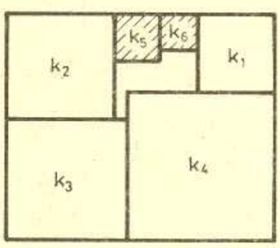
Rys. 5



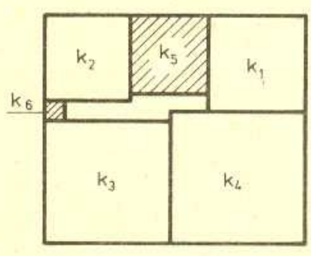
Rys. 6



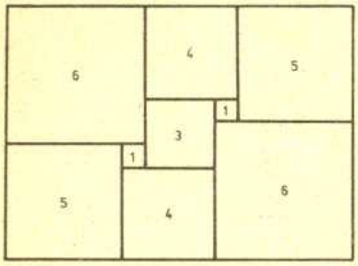
Rys. 7



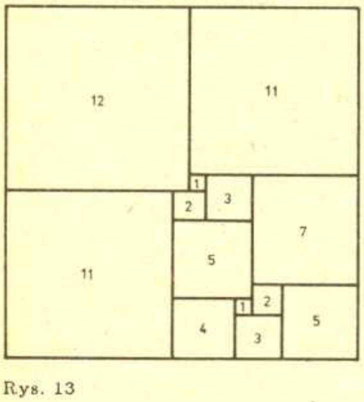
Rys. 8



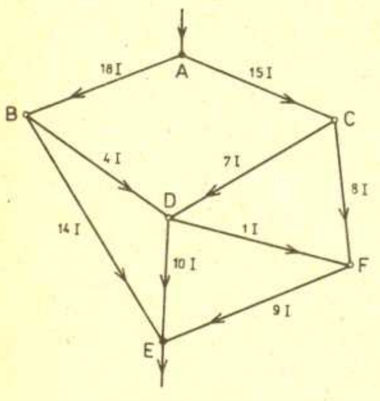
Rys. 9



Rys. 11



Rys. 13



Rys. 14

O tym, że istnieje prostokąt, który można rozłożyć doskonale na 9 kwadratów, wiadomo z rysunku 3. Oznacza to jednocześnie, że każdy prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 32 : 33, można rozłożyć doskonale na 9 kwadratów. Czy jest to jedyny warunek tak ekonomicznego podziału? Dokładniejsza analiza problemu pokazuje, że nie! (omawiamy to w dalszej części artykułu). Przykład innego prostokąta, który doskonale możemy podzielić na 9 kwadratów daje rysunek 10 na ostatniej stronie okładki. Oczywiście, rozkłady z rysunków 3 i 10 (jako minimalne) są proste, tzn. żaden fragment rozkładu nie wypełnia prostokąta mniejszego od wyjściowego (pomijając kwadraty wchodzące w skład rozkładu). Dowodzi się, że minimalne doskonałe rozbicia mają tylko prostokąty, których stosunek boków wynosi 32 : 33 lub 61 : 69.

Rzeczą ciekawą jest fakt, że istnieje tylko jeden prostokąt, który w sposób prosty i niedoskonały można rozłożyć na 9 kwadratów (rys. 11).

W 1960 roku C.J. Bouwkamp wykorzystując komputery opublikował katalog doskonałych i prostych rozkładów prostokątów, co obrazuje poniższa tabela.

liczba kwadratów występujących w podziale	9	10	11	12	13	14	15
liczba możliwych podziałów niedoskonałych	1	0	0	9	34	104	283
liczba możliwych podziałów doskonałych	2	6	22	67	213	744	2609

Interesujący jest fakt, że nie istnieją prostokąty, które można w sposób prosty i niedoskonały rozłożyć na 10 lub 11 kwadratów. Oto zestawienie wszystkich prostych rozkładów prostokątów na 10 kwadratów.

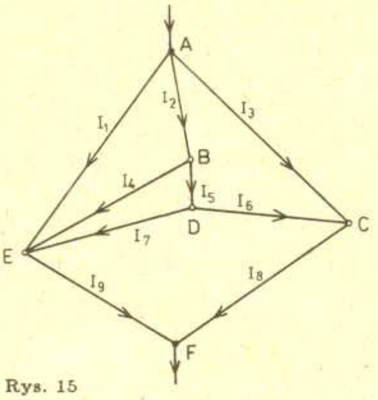
długości boków prostokąta	boki kwadratów rozkładu
57, 55	2, 3, 8, 11, 13, 15, 17, 25, 27, 30
65, 47	3, 5, 6, 11, 17, 19, 22, 23, 24, 25
105, 104	7, 12, 16, 19, 26, 28, 33, 44, 45, 60
115, 94	4, 11, 15, 16, 19, 23, 34, 39, 55, 60
130, 79	3, 11, 12, 23, 34, 35, 38, 41, 44, 45
111, 98	3, 4, 7, 11, 15, 26, 41, 44, 54, 57

Szczególnym przypadkiem rozważanego problemu są kwadraty, które przez długi okres nie poddawały się rozkładowi. Fakt ten upamiętnił S. Ruziewicz w *Księdze Szkockiej* jako problem 59. Pierwszy rozwiązał ten problem R. Sprague (1939 r.) podając rozkład na 55 kwadratów. Rozkład kwadratu o boku 175 na 24 kwadraty (rysunek na pierwszej stronie okładki) znalazł T. Willcocks (1948 r.). Niestety, nie jest to rozkład prosty (dlaczego?). „Lepszy" – prosty i doskonały rozkład kwadratu o boku 112 na 21 kwadratów podał A.J.W. Duivjestijn w *Scientific American*, tom 238 (6/1978, str. 86–88) – rysunek 12 z ostatniej strony okładki, oraz wykazał, że podział prosty i doskonały kwadratu na mniejszą liczbę kwadratów jest niemożliwy. Nadmieńmy jeszcze, że w katalogu Bouwkampa pośród prostych rozkładów prostokątów na mniej niż 14 kwadratów istnieje dokładnie jedno rozbicie kwadratu na 13 mniejszych kwadratów (rys. 13).

Wspomniani wyżej czterej amerykańscy matematycy dokonali dużego postępu w dziedzinie rozkładu prostokątów na kwadraty dzięki odkryciu związku między tą teorią a teorią przepływu prądu elektrycznego w zamkniętych obwodach i teorią grafów (łatwiej jest zbadać wszystkie możliwe sieci z n przewodników, niż mozolnie drogą prób zestawiać kwadraty, aż ułoży się z nich prostokąt). Wykazali następujące

Twierdzenie 3. Ze zbioru n kwadratów, niekoniecznie różnych, można zbudować prostokąt bez luk wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiada mu rozkład prądów według praw Kirchhoffa w obwodzie złożonym z n przewodników o oporze jednostkowym, bez źródeł elektryczności wewnątrz (każdemu natężeniu prądu w poszczególnym przewodniku odpowiada pewien bok kwadratu).

Prześledźmy na przykładzie, jak budujemy sieć odpowiadającą danemu rozkładowi prostokąta, np. z rysunku 3. Górnemu bokowi prostokąta odpowiada biegun A (rys. 14), z którego wychodzą dwoma przewodnikami prądy o natężeniu $18I$, $15I$ (I – umowna jednostka natężenia). Końce tych przewodów wyznaczają węzły B i C. Do kwadratu o boku 18 przylegają od dołu kwadraty 14 i 4, więc z węzła B muszą wychodzić przewodniki z prądami $14I$ (do bieguna E, który odpowiada dolnemu bokowi prostokąta) oraz $4I$ do nowego węzła D. Analogicznie z węzła C wychodzą przewodniki z prądami $7I$, $8I$. Ponieważ kwadraty 4 i 7 „kończą się" na tym samym poziomie, więc przewodniki z prądami $4I$, $7I$ tworzą wspólny węzeł D (patrz



Rys. 15

rysunek), z którego wychodzą przewodniki z prądami $10I$ (do bieguna E) oraz $1I$ do węzła F. Wreszcie z węzła F wychodzi przewodnik do bieguna E z prądem $9I$, co kończy budowę sieci. W dolnym biegunie schodzą się przewodniki z prądami przyporządkowanymi dolnemu bokowi prostokąta; lewa strona obwodu ABE odpowiada lewemu bokowi prostokąta, prawa strona $ACFE$ – prawemu bokowi. Spróbujmy teraz przeprowadzić procedurę odwrotną: dla danej sieci złożonej z przewodników o oporze jednostkowym zbudujemy rozkład prostokąta. Rozpatrzmy sieć złożoną z 9 przewodników przedstawioną na rysunku 15 z biegunami A, F. Wypiszmy równania Kirchhoffa dla węzłów

$$\begin{aligned} B:&\quad I_2 - I_4 - I_5 = 0,\\ C:&\quad I_3 + I_6 - I_8 = 0,\\ D:&\quad I_5 - I_7 - I_6 = 0,\\ E:&\quad I_1 + I_4 + I_7 - I_9 = 0 \end{aligned}$$

oraz obwodów zamkniętych

$$\begin{aligned} ABEA:&\quad I_2 + I_4 - I_1 = 0,\\ ACDBA:&\quad I_3 - I_6 - I_5 - I_2 = 0,\\ BDEB:&\quad I_5 + I_7 - I_4 = 0,\\ DCFED:&\quad I_6 + I_8 - I_9 - I_7 = 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ 8 równań (nie można bowiem dla 9 wielkości ułożyć więcej niż 8 niezależnych równań jednorodnych) np. względem I_1 otrzymujemy: $I_2 = \frac{16}{25}I_1$, $I_3 = \frac{28}{25}I_1$, $I_4 = \frac{9}{25}I_1$, $I_5 = \frac{7}{25}I_1$, $I_6 = \frac{5}{25}I_1$, $I_7 = \frac{2}{25}I_1$, $I_8 = \frac{33}{25}I_1$, $I_9 = \frac{36}{25}I_1$. Przyjmując $I_1 = 25$ mamy rozkład prostokąta na 9 parami różnych kwadratów, co obrazuje rysunek 10.

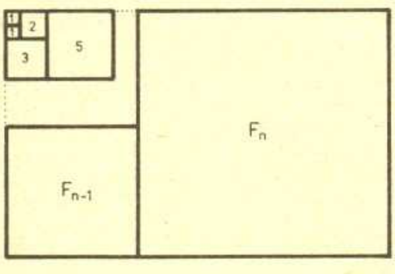
Badając sieci złożone z 9 przewodników można przekonać się, że tylko w dwóch sieciach (rys. 14, 15) płyną w każdym przewodniku różne prądy. Istnieją zatem tylko dwa różne doskonałe rozkłady prostokątów na 9 kwadratów. Rozważając wszystkie sieci złożone z 4, 5, 6, 7 lub 8 przewodników można wykazać, że niektóre prądy płynące w tych sieciach muszą być jednakowe, co oznacza, że nie można zbudować prostokąta z mniejszej liczby kwadratów niż 9. Jest to inny dowód twierdzenia 2.

Czy problematykę doskonałych rozkładów można uogólnić? Dla $m > 4$ z kilku (więcej niż jednego!) m-kątów foremnych nie można złożyć dowolnego wielokąta wypukłego. Wynika to stąd, że suma dwóch kątów m-kąta foremnego wynosi

$$2\frac{180^\circ(m-2)}{m} = 360^\circ - 180^\circ\frac{4}{m} > 180^\circ,$$

a to oznacza, że w jednym wierzchołku wielokąta wypukłego nie mogą się schodzić dwa m-kąty foremne. Podobnie elementem rozkładu nie może być trójkąt foremny, gdyż nawet trójkąt równoboczny nie daje się rozłożyć na skończoną liczbę różnych trójkątów równobocznych (patrz [2]). Problematyka ta nie daje się również rozszerzyć na przestrzeń – żaden prostopadłościan nie da się rozłożyć na skończoną liczbę nierównych sześcianów. Dlaczego tak się dzieje? Niech $a < b < c$ oznaczają trzy krawędzie prostopadłościanu. Postawmy prostopadłościan na ścianie o bokach a, b. Wszelki doskonały rozkład prostopadłościanu na sześciany wyznacza doskonały rozkład tej ściany na kwadraty. Najmniejszy z nich ma bok mniejszy niż $\sqrt{\frac{ab}{9}} \le \frac{c}{3}$. Rozpatrzmy teraz górną ścianę tego najmniejszego sześcianu brzegowego. Rozkład prostopadłościanu na sześciany wyznacza znowu rozkład tej ściany na różne kwadraty, z których najmniejszy ma bok nie większy od $\frac{1}{3}\frac{c}{3} = \frac{1}{3^2}c$. Postępując w ten sposób otrzymujemy nieskończony ciąg kwadratów o bokach kolejno nie większych od $\frac{1}{3^3}c$, $\frac{1}{3^4}c, \ldots$ Istnienie nieskończonego ciągu sześcianów doprowadza do sprzeczności z postulatem skończoności rozkładu, a ponadto

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right)c = \frac{c}{2} < c.$$



Ciekawostka: Rysunek pokazuje, jaki jest związek między ciągiem Fibonacciego 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34..., a budową prostokątów z kwadratów.

Literatura

[1] R.L. Brooks, C.A. Smith, A.H. Stone, W.T. Tutte, *The dissection of rectangles into squares*, Duke J. Math. 7(1940), 312–340.

[2] I.M. Jagłom, *Kak razriezat' kwadrat?*, Izd. Nauka, Moskwa 1959.

[3] Z. Moroń, *O rozkładzie prostokątów na nierówne kwadraty*, Wiadom. Mat. I,1(1955), 75–94.

[4] *The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Cafe*, Ed. R. Daniel Mauldin, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart 1981.