

Dr hab. Marek KORDOS

O odkryciu i wprowadzeniu do użytku liczb rzeczywistych pisałem w *Delcie* 2/1989.

Od momentu, gdy ludzie zaczęli być przekonani, że za pomocą liczb można opisywać wszelkiego rodzaju wielkości i gdy własności liczb nadających się do takiego opisu zostały ustalone, powstał problem, jak w praktyce przyporządkowywać wielkościom liczby. Czyli – jak mierzyć.

Dziś teoria mierzenia mieści się w dziale matematyki zwanym **funkcje rzeczywiste**, a podręczniki o takim tytule mają zazwyczaj dwie części: **teorię miary** i **teorię całki**. Jest tu mowa o tak zwanych całkach oznaczonych, czyli obliczeniach miar obszarów opisanych danymi funkcjami. Używane przez nas całki są (przeważnie) dwóch rodzajów.

Pierwszy z nich (wypracowany przez licznych matematyków przełomu XVI i XVII wieku, takich jak Kepler, Torricelli, Barrow) został skodyfikowany przez Newtona i Leibniza. Kodyfikacja ta była jednak na tyle nieścisła i intuicyjna, że używana przez nich całka nosi dziś nazwę **całki Riemanna** od nazwiska matematyka, który (200 lat później) podał jej definicję na tyle ścisłą, że może być ona używana do dziś. Definicja ta określa całkę jako liczbę leżącą pomiędzy dwoma zbiorami przybliżeń, a więc całka ta jest dobrze określona, gdy pomiędzy te zbiory można „wetknąć” tylko jedną liczbę. Doświadczenie wskazuje, że często między dolnymi i górnymi przybliżeniami mieści się wiele liczb. W takiej sytuacji całka Riemanna nie jest określona i trzeba albo zrezygnować z mierzenia, albo mierzyć jakoś inaczej.

Druga powszechnie używana całka powstała pół wieku później (ma tyle lat co nasze stulecie) i nosi nazwę **całki Lebesgue’a** (od nazwiska jej twórcy). Tu dla ustalenia wartości całki używa się już tylko jednego zbioru przybliżeń, którego konstrukcja (specyficzna dla tej całki) gwarantuje sensowność otrzymanego wyniku. Tam, gdzie określone są obie całki, otrzymujemy ten sam wynik, niezależnie od tego, którą z nich zastosujemy. Wiele jest jednak sytuacji, gdzie całka Lebesgue’a daje się obliczyć, mimo że całka Riemanna nie jest określona.

Są jeszcze inne całki, ale ciekawszym wydaje się pytanie, jak radzono sobie z mierzeniem przez 19 stuleci, jakie upływały od jasnego sformułowania „o co chodzi” przez Eudoksosa do prac XVI-wiecznych matematyków.

Odpowiedź na to pytanie jest znana. Używano wprowadzonej przez tegoż Eudoksosa **metody wyczerpywania**, zwanej też czasami całkowaniem Starożytnych. Robi się to w następujący sposób.

Z figury, którą chcemy zmierzyć, wyjmujemy część, której miarę znamy (na ogół wielokąt czy wielościan), przy czym musi być ona większa od połowy całej figury. Miarę tej części oznaczmy S_1 . Z pozostałą częścią figury postępujemy tak samo otrzymując S_2 , potem S_3 , S_4 itd. Eudoksos twierdzi, że suma

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

tym lepiej przybliża miarę figury, im większe jest n , oraz że nieskończona suma daje miarę figury.

Uzasadnienie jest proste. Zakładając, że mierzona przez nas figura daje się zmierzyć i ma miarę S , mamy

$$(*) \quad S \geq S_1 + S_2 + S_3 + \dots \geq \frac{S}{2} + \frac{S}{4} + \frac{S}{8} + \dots = S.$$

Istotnie, pierwsza nierówność wynika z faktu, że wyjmowaliśmy zawsze części mierzonej figury (i były one rozłączne), druga – że zawsze wyjmowaliśmy ponad połowę tego, co jeszcze było, a równość – to prosta własność ciągu (postępu) geometrycznego. Tak więc we wzorze (*) występują same równości.

Jak widać – metoda jest prosta, używa tylko jednego zbioru przybliżeń (jak całka Lebesgue’a – choć jest to zupełnie inny zbiór), co więcej – zbiór ten jest ciągiem. Można zapytać, jak wiele się traci pozwalając sobie na takie luksusy.

Kwadrat jednostkowy z dziurką w każdym punkcie o obu współrzędnych wymiernych nie ma pola w sensie takiej całki. Przybliżenie górne jest nie mniejsze od 1, a dolne – dokładnie 0.

W sensie Lebesgue’a opisany poprzednio kwadrat ma pole 1, bo tyle wynosi kres dolny pół jego pokryć „przyswoitymi” figurami.

Rozwiązanie zadania F 272. Liczba atomów argonu $^{37}_{18}\text{Ar}$ wynosi

$$n = \sigma t N_{\text{Cl}} \cdot \Phi,$$

gdzie $t = 1$ rok $\approx 3,2 \cdot 10^7$ s,
 N_{Cl} – liczba atomów chloru,
 $\Phi = \frac{N}{4\pi R^2}$ – strumień neutronów na powierzchni Ziemi. Otrzymujemy

$$N_{\text{Cl}} \approx \frac{4\pi R^2 n}{\sigma t}.$$

Wynika stąd, że w eksperymencie należy użyć CCl_4 w ilości równej

$$M \approx \frac{\mu N_{\text{Cl}}}{4} \cdot \frac{1}{\eta} = \mu N_{\text{Cl}} \approx 560 \text{ ton},$$

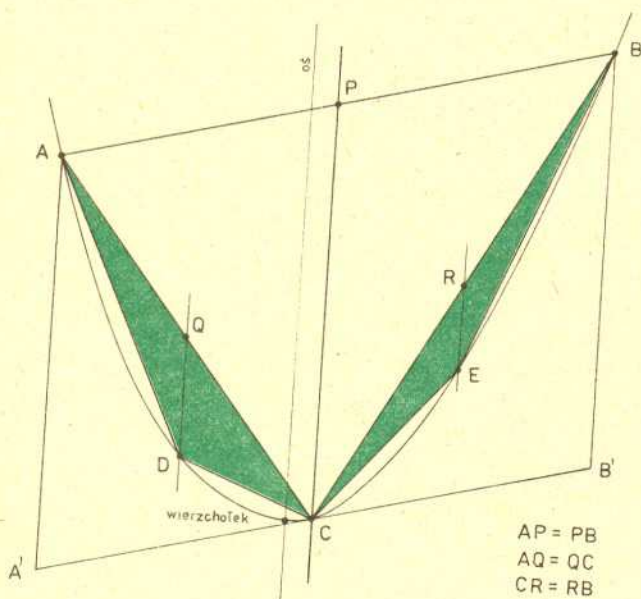
gdzie μ jest masą molową CCl_4 .

To, że coś się traci, jest oczywiste – najlepszym dowodem jest tu fakt, że w końcu opracowano inne, bardziej skomplikowane całki. Warto jednak zauważyć, jak wiele można było osiągnąć używając całki Eudoksosa. Podam dwa przykłady. Pierwszy z nich to tzw. kwadratura paraboli, czyli pierwsze obliczenie pola figury płaskiej ograniczonej krzywą inną niż łamana lub okrąg (autor – Archimedes). Drugi z nich to obliczenie objętości ostrosłupa. To może zdziwić – przecież każdy wie, że objętość ta jest równa $\frac{1}{3}P \cdot h$, gdzie P to pole podstawy, a h – to wysokość. I po co tu całkować? Prawda jest jednak taka, że wzór ten łatwo uzyskać, jeśli wiemy, iż objętość ostrosłupa zależy tylko od P i h , a nie zależy np. od kształtu ostrosłupa. To natomiast, że objętość ostrosłupa zależy tylko od P i h , nie da się wykazać bez użycia całek (dowolnego już rodzaju). Ten zdumiewający fakt został odkryty dopiero w 1900 roku przez Dehna. Przedtem dopuszczano, że może to być tylko powszechna nieumiejętność. Objętość ostrosłupa obliczył (metodą wyczerpywania) Euklides.

Twierdzenie Dehna można znaleźć np. w *Delcie* 11/1984.

Kwadratura paraboli

Obliczamy pole figury ograniczonej łukiem paraboli i zamykającą go cięciwą AB .



Przez środek cięciwy prowadzimy prostą równoległą do osi paraboli otrzymując w przecięciu z parabolą punkt C . Pole trójkąta ABC oznaczmy S_1 . Jest to oznaczenie zgodne z metodą Eudoksosa, bo styczna do paraboli w punkcie C jest równoległa do AB (Czytelniku – dlaczego?) i mierzona figura mieści się w równoległoboku $ABB'A'$, gdzie AA' i BB' są równoległe do osi. A trójkąt ABC to połowa tego równoległoboku, a więc więcej niż połowa mierzonej figury. Wyjmujemy więc ABC i do obu pozostałych części figury stosujemy ten sam, co poprzednio, zabieg. Suma pól trójkątów oznaczonych na rysunku kolorem będzie naszym S_2 . Mógł Archimedes, więc możesz i Ty, Czytelniku, sprawdzić, że pola obu trójkątów są równe, oraz że każdy z nich ma pole równe $\frac{1}{8}$ pola trójkąta ABC (w tym celu wystarczy wykazać, że wysokość trójkąta ACD z wierzchołkiem D jest osiem razy krótsza od wysokości trójkąta ABC z wierzchołkiem B). Jeśli tak, to $S_2 = \frac{1}{4}S_1$ i podobnie $S_n = \frac{1}{4}S_{n-1}$. Zatem pole mierzonej figury jest równe $\frac{4}{3}$ pola trójkąta ABC , które możemy obliczyć tradycyjnie.

Objętość czworościanu

a dokładniej: stosunek objętości do iloczynu pola podstawy i wysokości jest w każdym czworościanie taki sam. Wykonajmy rysunki dwóch czworościanów $ABCD$ i $A'B'C'D'$. Oznaczmy jeszcze pola ABC i $A'B'C'$ przez P i P' , a opuszczone na te podstawy wysokości przez h i h' . Niech K, L, M, N, O, Q (i tak samo z primami) będą środkami krawędzi jak na rysunku. Wyjmujemy z każdego z czworościanów dwa graniastosłupy: $KBLNQM$ i $KONLCM$ (i tak samo z primami). Ich sumę objętości oznaczmy przez S_1 i S'_1 . Są to oznaczenia zgodne z metodą Eudoksosa, bo czworościan $NQMD$ wkłada się przez przesunięcie do graniastosłupa $KBLNQM$, a $AKON$ do $KONLCM$ (i tak samo z primami). Zauważmy, że (sprawdź Czytelniku)

$$(**) \quad \frac{S_1}{S'_1} = \frac{\frac{1}{4}P \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{2}h)}{\frac{1}{4}P' \cdot \frac{1}{2}h' + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}P' \cdot \frac{1}{2}h')} = \frac{P \cdot h}{P' \cdot h'}$$

To, co z czworościanów zostało, to dwa podobne do nich (w skali $1/2$) czworościany. Powtarzamy więc poprzednie rozumowanie otrzymując kolejno

$$\frac{S_2}{S'_2} = \frac{P \cdot h}{P' \cdot h'} = \frac{S_3}{S'_3} = \frac{S_4}{S'_4} = \dots$$

Mamy więc ostatecznie dla objętości S i S' naszych czworościanów

$$\frac{S}{S'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots} = \frac{Ph}{P'h'}$$

Stąd

$$\frac{S}{Ph} = \frac{S'}{P'h'}$$

Ustalenie, że stosunek ten jest równy akurat $\frac{1}{3}$, jest rzeczą bardzo prostą (i do niedawna było w podręcznikach szkolnych). Podobnie jak uogólnienie na dowolne ostrosłupy.

Na koniec uwaga: oczywiście, można oglądając wzór (**), zauważyć, że końcowy wynik jest do uzyskania bezpośrednio i to rozpatrując tylko jeden czworościan. Istotnie, otrzymujemy

$$S_1 = \frac{1}{4}Ph, \quad S_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot S_{n-1},$$

czyli

$$S = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}Ph\right) = \frac{1}{3}Ph.$$

Chciałem jednak rachować tak jak Euklides.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 547. Udowodnić, że jeśli obwody ścian czworościanu są równe, to ściany są trójkątami przystającymi.

Rozwiązanie na str. 4

M 548. Szereg $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ jest bezwzględnie zbieżny (tj. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$), ponadto dla każdego $k \geq 1$ mamy $A_k = a_k + a_{2k} + a_{3k} + \dots = 0$. Wykazać, że $a_i = 0$ dla $i = 1, 2, 3, \dots$

Rozwiązanie na str. 10

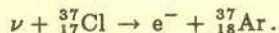
M 549. Wykazać, że

$$\binom{n}{1} \cdot 1 - \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{3} - \dots \pm \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

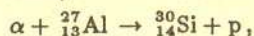
F 272. Reakcje jądrowe zachodzące w Słońcu można badać mierząc strumień neutrin (ν) pochodzących ze Słońca. Detekcja neutrin jest możliwa przy wykorzystaniu reakcji



Średni przekrój czynny takiej reakcji wynosi $\sigma = 1,4 \times 10^{-42} \text{ cm}^2$. Zakładając, że Słońce produkuje $N = 3 \times 10^{33}$ neutrin na sekundę, ocenić, w jakiej masie CCl_4 (czterochloru węgla) powstanie w ciągu roku $n = 100$ atomów ${}_{18}^{37}\text{Ar}$. Przyjmujemy, że CCl_4 jest naturalną mieszaniną izotopów, w której tylko $\eta = 25\%$ jąder chloru to jądra ${}_{17}^{37}\text{Cl}$. Promień orbity Ziemi wynosi $R = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Rozwiązanie na str. 1

F 273. Ocenić przekrój czynny reakcji



jeśli wiadomo, że po przejściu cząstek α o energii 8 MeV przez aluminiową tarczę powstaje $n_p = 8$ protonów na $n_\alpha = 10^6$ cząstek α . W powietrzu, w warunkach normalnych cząstka α przebiega $R_{pow} = 7,0 \text{ cm}$.

Rozwiązanie na str. 6

W obu zadaniach pojawia się pojęcie przekroju czynnego. Przekrój czynny (oznaczany σ) jest miarą prawdopodobieństwa zajścia określonej reakcji w czasie jednej sekundy dla jednostkowego strumienia Φ cząstek wywołujących reakcję (1 cząstka/cm²s) podzielonego przez liczbę cząstek N w bombardowanej próbce. Liczba cząstek n zderzających się w ciągu sekundy wynosi $n = N\sigma\Phi$.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

ATOMY KOŁOWE

Atomami rydbergowskimi nazywamy atomy znajdujące się w bardzo wysokich stanach wzbudzonych (patrz Fizyczne nowinki, Delta 10/1986). Natomiast atomy kołowe są to te spośród atomów rydbergowskich, które mają maksymalną dopuszczalną wartość całkowitego momentu pędu ($l = n-1$). Symbole n i l oznaczają liczby kwantowe (główną i poboczną) w modelu atomu Bohra. Takie atomy są obiektami wyznaczającymi symboliczną granicę między fizyką klasyczną i kwantową. Wzbudzone elektrony w atomach kołowych są znacznie oddalone od jądra atomowego. Prawdopodobieństwo znalezienia tych elektronów jest największe w obszarze cienkiego torusa (czyli obraczki) o promieniu wyznaczonym przez model atomu Bohra i wynoszącym $n^2 a_0$ (gdzie a_0 jest tzw. promieniem pierwszej orbity Bohra równym $5 \times 10^{-11} \text{ m}$). Oznacza to, że na przykład dla $n=44$ promień ten wynosi około 10^{-7} m , czyli 0,1 μm . Drugą ważną własnością atomów kołowych jest ich stosunkowo długi czas życia, który w zależności od wartości liczby kwantowej n dochodzi do setnych części sekundy. Tak długie czasy życia (przewyższające około milion razy typowe czasy życia "zwykłych" stanów wzbudzonych) umożliwiają wykonywanie z atomami kołowymi wielu interesujących eksperymentów. Pierwsze atomy kołowe otrzymano w 1985 roku za pomocą rezonansowego pobudzenia mikrofalami atomów znajdujących się już wcześniej w stanach wzbudzonych. W ostatnich latach fizycy z Uniwersytetu imienia Piotra i Marii Curie w Paryżu zaproponowali nową, bardzo pomysłową metodę otrzymywania atomów kołowych w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym. Polega ona na gwałtownym włączeniu pola magnetycznego w trakcie wyłączenia pola elektrycznego. W 1988 roku inna grupa paryska z Ecole Normale Supérieure przeprowadziła pierwsze udane próby otrzymywania atomów kołowych tą nową metodą. Atomy litu rozpedzone do szybkości 1500 m/s wpadały w obszar pola elektrycznego o natężeniu 200 V/cm, gdzie wzbudzone były najpierw za pomocą impulsowych laserów krystalicznych ze stanu 2s do 2p, dalej ze stanu 2p do 3d i wreszcie ze stanu 3d do stanów kołowych o głównej liczbie kwantowej n od 20 do 25. Całość układu znajdowała się w elektromagnetycznym wytwarzającym pole do 0,01 T. Powstające atomy kołowe były rejestrowane w dalszej części układu, gdzie ulegały jonizacji w bardzo silnym polu elektrycznym (ponad 3 kV/cm). Zastosowana metoda otrzymywania atomów kołowych okazała się znacznie bardziej efektywna od dotychczas stosowanych i wkrótce planowane są próby otrzymania kołowego wodoru, jak i szeregu innych atomów.