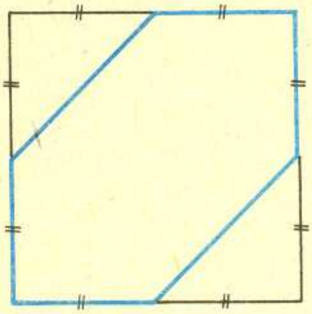
Równość tę możemy, stosując znane wzory, przekształcić w następujący sposób
$$2\sin\frac{A+C}{2}\ \cos\frac{A-C}{2} = 2\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\ \cos\frac{A+C}{2},$$
czyli
$$\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}.$$
Zatem
$$\sin\frac{B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right) = \cos\frac{A+C}{2} =$$
$$= \cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}.$$
Ale na mocy udowodniónej nierówności wiemy, że
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \le \left(\sin\sqrt{\frac{A}{2}\cdot\frac{C}{2}}\right)^2 = \left(\sin\frac{B}{2}\right)^2,$$
więc
$$\sin\frac{B}{2} \le 2\left(\sin\frac{B}{2}\right)^2,$$
skąd mamy
$$\sin\frac{B}{2} \ge \frac{1}{2}, \qquad \text{czyli} \qquad B \ge \frac{\pi}{3}.$$
Z drugiej strony $A+B+C=\pi$. Jednocześnie $A+C \ge 2\sqrt{AC}$ (przy czym równość zachodzi jedynie dla $A=C$), a zatem
$$\pi = A+B+C \ge 2\sqrt{AC}+B = 3B \ge \pi,$$
więc $A+C = 2\sqrt{AC}$. Otrzymujemy stąd, że
$$A = C = B = \frac{\pi}{3}.$$
W ten sposób wykazaliśmy, że jedynym trójkątem, w którym boki tworzą ciąg arytmetyczny, a kąty ciąg geometryczny, jest trójkąt równoboczny.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL



M 541. Wykazać, że istnieje przekształcenie afiniczne płaszczyzny przeprowadzające narysowany obok sześciokąt na sześciokąt foremny.
Rozwiązanie na str. 13

M 542. Udowodnić, że dla każdego x rzeczywistego
$$e^x \le x + e^{x^2}.$$
Rozwiązanie na str. 14

M 543. Skonstruować trójkąt mając dany wierzchołek i dwie proste zawierające dwusieczne nie przechodzące przez niego.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 268. Jednym ze sposobów otrzymywania wysokich temperatur, niezbędnych do przeprowadzenia kontrolowanej reakcji termojądrowej, jest tzw. magnetyczna termoizolacja. Ucieczka szybkich cząstek ze strefy o wysokiej temperaturze jest ograniczona polem magnetycznym. Ocenić wielkość natężenia prądu w słupie wyładowania gazowego o promieniu 3 cm niezbędną do tego, aby elektrony mające prędkość równą średniej kwadratowej prędkości ruchu termicznego, odpowiadającego temperaturze $T = 10^6$ K, nie były w stanie oddalić się od powierzchni słupa na odległość większą niż $r = 3\cdot 10^{-3}$ cm.
Rozwiązanie na str. 7

F 269. Prostoliniowy przewodnik znajduje się nad nadprzewodzącą płaszczyzną. W przewodniku płynie stały prąd. Zakładając jednorodną gęstość przewodnika $\rho = 2\cdot 10^{-3}$ kg/m należy znaleźć wysokości nad płaszczyzną, na jakiej zawiśnie ten przewodnik, jeśli popłynie w nim prąd $I = 20$ A.
Rozwiązanie na str. 3