Obalamy prawa fizyki

Doc. dr Jan GAJ

Człowiek często kieruje się w życiu uczuciami. Fizycy nie są wyjątkiem. Kochają oni swoje dzieci – teorie fizyczne – i często, podobnie jak wielu ludzi swym prawdziwym dzieciom, wyrządzają im swą ślepą miłością krzywdę.

Uczucie każe nieraz fizykowi zapomnieć, że racją bytu teorii jest zgodność z opisywaną przez nie rzeczywistością, a nie odwrotnie. Dlatego też warto od czasu do czasu spojrzeć krytycznym okiem na nasze wyobrażenia o świecie fizycznym. Dziś obalamy prawo, które sformułował nie byle kto, a mianowicie Galileo Galilei:

Galileo Galilei (1564 – 1642), w Polsce zwany nieraz z tajemniczych powodów Galileuszem – jeden z największych uczonych wszystkich czasów. Zajmował się astronomią, matematyką i fizyką. Tu nie mogę się oprzeć pokusie zrobienia dygresji: W naszym kraju panuje nieznany wśród licznych innych nacji zwyczaj tłumaczenia nazwisk. Choć jestem skłonny zgodzić się z przyjętym na świecie zwyczajem tłumaczenia imion przynajmniej najsławniejszych ludzi, to tłumaczenie nazwisk wydaje mi się całkowitym nieporozumieniem. Konia z rzędem temu, kto skłoni Francuzów, żeby się domyślili, że pod mianem Kartezjusza kryje się ich znakomity rodak René Descartes.

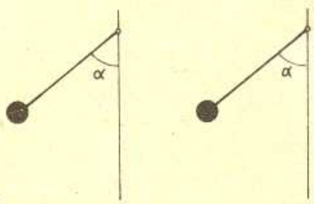
Izochronizm wahadła

Może przypadkiem, Czytelniku, masz 17 lat? W tym właśnie wieku Galileo Galilei obserwował w katedrze w Pizie wahający się żyrandol i zauważył, że niezależnie od amplitudy wahań ich okres jest zawsze taki sam. Nawiasem mówiąc – do porównywania okresów wahań używał jako stopera ... swojego pulsu. Był to, jak się wydaje, jedyny sukces pedagogiczny jego ojca, który wysłał młodego Galileo na studia medyczne do Pizy w nadziei, że uchroni go przed naukami ścisłymi. Wkrótce jednak skapitulował i wyraził zgodę na studia matematyczne syna, za co powinniśmy mu być wdzięczni.

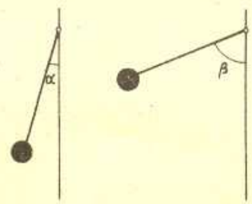
Pozostawmy jednak teraz wiekopomne dzieło życia naszego bohatera własnemu losowi, a zajmijmy się prawem izochronizmu wahadła. Dla uproszczenia rozumowania zajmijmy się wahadłem matematycznym, czyli punktową masą m zawieszoną na nierozciągliwej nici o długości l. O prawie tym powiem krótko i zdecydowanie:

To jest nieprawda.

Gdybyś miał wątpliwości, opierał się na autorytecie podręcznika czy nauczyciela – możesz sam sprawdzić. W tym celu trzeba wykonać dwa identyczne wahadła zawieszając na nitkach o równej długości dwa ciężarki. Wychylamy oba wahadła o ten sam kąt (rys. 1) i jednocześnie puszczamy. Jeśli starannie odmierzyłeś długość nitek, oba wahadła będą wahać się ze zgodnymi fazami. A teraz uwaga – obalimy prawo izochronizmu. Jedno wahadło wychylamy o mały kąt, a drugie o możliwie duży – jak na rysunku 2.



Rys. 1



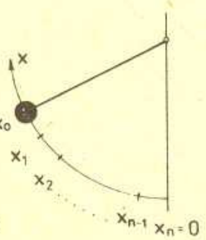
Rys. 2

Stwierdzenie, że prawo izochronizmu nie jest słuszne, brzmi bardzo radykalnie. Gdybyśmy chcieli pozbyć się z fizyki wszystkich praw, które w pewnych warunkach nie są zgodne z doświadczeniem, ogromna większość tej nauki ległaby w gruzach. Nie moglibyśmy stosować praw mechaniki klasycznej ani do makroświata (bo przy wielkich prędkościach są niesłuszne), ani do mikroświata (bo tam z kolei obowiązuje mechanika kwantowa). Mówiąc więc poważniej, nie należy potępiać w czambuł praw, którym zdarza się grzech niezgodności z doświadczeniem, ale trzeba zdawać sobie sprawę z ich ograniczeń.

Już po chwili zauważysz, że wahadła, które początkowo wahały się ze zgodnymi fazami, rozstroją się – wahadło o większej amplitudzie zacznie się opóźniać. W pewnym momencie zauważysz nawet, że fazy obu wahadeł staną się przeciwne! Skoro już przekonałeś się, że prawo izochronizmu jest niesłuszne, zainteresujesz się zapewne,

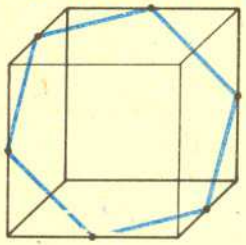
Czy to się da obliczyć?

Każdy zapytany o to student fizyki powie Ci natychmiast, że ścisłe rozwiązanie równania ruchu wahadła matematycznego nie wyraża się przez funkcje elementarne. Będzie Cię straszył całkami eliptycznymi, aby odejść w chwale wybitnego specjalisty pozostawiając Cię z nie rozwiązanym problemem. Jeżeli nie zrazi Cię kontakt z fachowcem, spróbujesz pewnie zabrać się do rzeczy samodzielnie. Jak? – skoro ściśle się nie da, trzeba uciec się do metody przybliżonej. Ależ to na nic – powiesz – w przybliżeniu ruch wahadła jest ruchem harmonicznym, a ten z kolei jest naprawdę izochroniczny – okres drgań oscylatora harmonicznego nie zależy od amplitudy. To prawda, ale nie upadajmy na duchu. Trzeba znaleźć lepsze przybliżenie. Najprostsze, jakie mogę Ci zaproponować, jest następujące: dzielisz ruch wahadła na pewną liczbę – powiedzmy n – etapów (rys. 3) od maksymalnego wychylenia x_0 do zera ($x_n = 0$). Jest to tylko 1/4 okresu, ale pozostałe ćwiartki są takie same, więc nie ma potrzeby się nimi zajmować. Oczywiście, droga jest dla każdego etapu taka sama i wynosi $1/n$ amplitudy x_0. Czas przebycia każdego etapu znajdziemy dzieląc drogę przez prędkość średnią, którą obliczymy (uwaga – tu robimy przybliżenie!) jako średnią arytmetyczną prędkości na początku i na końcu etapu. Potrzebne prędkości w punktach x_0, x_1, ..., x_n znajdziemy, oczywiście, z zasady zachowania energii. Teraz pozostaje nam tylko dodać czasy przebycia wszystkich etapów, całość pomnożyć przez 4 (bo znaleźliśmy ćwiartkę okresu) i już mamy okres wahań.



Rys. 3

Rozwiązanie zadania M 541.



Wystarczy zauważyć, że nasz sześciokąt jest rzutem prostokątnym sześciokąta foremnego, który z kolei jest przekrojem sześcianu.

A jak to będzie wyglądać w praktyce?

zapytasz teraz. Spróbujmy wyliczyć to dla któregoś, powiedzmy, i–tego etapu:

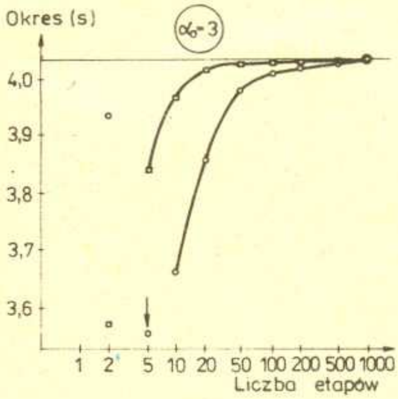
	początek etapu	koniec etapu
wychylenie (długość łuku)	x_{i-1}	x_i
wychylenie kątowe	$\alpha_{i-1} = x_{i-1}/l$	$\alpha_i = x_i/l$
energia potencjalna *	$E_{pi-1} = = -mgl\cos\alpha_{i-1}$	$E_{pi} = = -mgl\cos\alpha_i$
energia kinetyczna **	$E_{ki-1} = E - E_{pi-1} = = mgl(\cos\alpha_{i-1} - \cos\alpha_0)$	$E_{ki} = E - E_{pi} = = mgl(\cos\alpha_i - \cos\alpha_0)$
prędkość	$v_{i-1} = \sqrt{2E_{ki-1}/m} = = \sqrt{2gl(\cos\alpha_{i-1} - \cos\alpha_0)}$	$v_i = \sqrt{2E_{ki}/m} = = \sqrt{2gl(\cos\alpha_i - \cos\alpha_0)}$
prędkość średnia i–tego etapu	$v_{si} = (v_{i-1} + v_i)/2$	
droga	$\Delta x = x_{i-1} - x_i = x_0/n$	
czas dla i–tego etapu	$\Delta t_1 = \Delta x/v_{si}$	

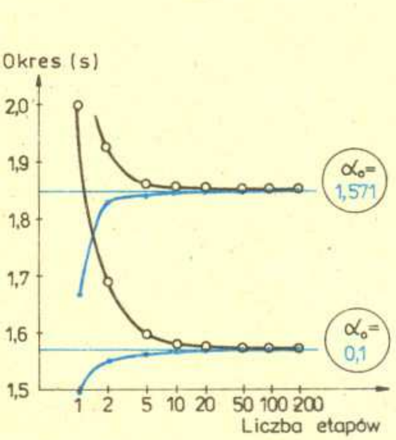
*Zero energii potencjalnej wybrałem w punkcie zawieszenia wahadła.
**Energia całkowita równa się energii potencjalnej przy maksymalnym wychyleniu.

```
10 REM **** program "galileo" oblicza okres wahan ****
20 INPUT "przyspieszenie ziemskie";G
30 INPUT "dlugosc";L
40 INPUT "amplituda";X0
50 INPUT "liczba etapow";N
60 T=0                                  :REM inicjuje liczenie czasu
70 FOR I=1 TO N
80 X1=X0-X0/N*(I-1)                     :REM wychylenie poczatkowe etapu
90 X2=X1-X0/N                           :REM wychylenie koncowe etapu
100 V1=SQR(2*G*L*(COS(X1/L)-COS(X0/L))) :REM predkosc poczatkowa
110 V2=SQR(2*G*L*(COS(X2/L)-COS(X0/L))) :REM predkosc koncowa
120 VS=(V1+V2)/2                        :REM predkosc srednia
130 T=T+(X1-X2)/VS                      :REM dodaje czas przebycia etapu
140 NEXT I
150 T=T*4                               :REM bo sa cztery cwiartki
160 PRINT T
170 GOTO 50
```

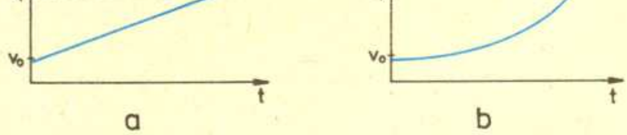
Jeżeli jesteś cierpliwy, możesz teraz posługując się powyższą tabelką wykonać stosowne obliczenia, na przykład dzieląc amplitudę najpierw na 2, potem 5 i 10 etapów i sprawdzić, czy otrzymany wynik w miarę powiększania liczby etapów ustala się. Gdybyś nie grzeszył cierpliwością, a miał dostęp do komputera, proponuję Ci program w BASICU, który wykona czarną robotę.

Kiedy już upewnisz się, że dzielisz ruch na dostatecznie wiele etapów, aby osiągnąć żądaną dokładność, możesz zmieniać amplitudę i zobaczyć, jak wpływa ona na okres wahań. Wyniki swoich obliczeń przedstawiam na wykresach.





Widać, że przy amplitudzie kątowej $\alpha_0 = \pi/2$ okres wahań wydłuża się o 18% w porównaniu z okresem dla małych amplitud, a więc całkiem znacząco. Jeszcze większe zmiany okresu można osiągnąć dla amplitud większych od $\pi/2$, ale wtedy ciężarek wahadła musiałby być zamocowany na lekkim pręcie, a nie na nitce. Jak widzisz, Czytelniku, zbieżność proponowanej metody nie jest zbyt szybka i gdybyś chciał poznać wartość okresu dla amplitudy różnej od użytych w powyższych rachunkach, osiągnięcie sensownej dokładności bez komputera wymagałoby sporej cierpliwości. Możesz jednak poprawić metodę obliczeń, jeżeli sprytnie przeprowadzisz uśrednianie. Jak skuteczne może być takie ulepszenie, widać na rysunkach (linie kolorowe). Nie zdradzę Ci sposobu uśredniania, jakiego użyłem, aby poprawić zbieżność procedury, ale zwrócę Twą uwagę na pewną wadę średniej prędkości równej $(v_1 + v_2)/2$. Ten sposób uśredniania jest ścisły dla ruchu jednostajnie zmiennego. Rysunki przedstawiają zależność prędkości od czasu w ruchu ze stałym (a) oraz rosnącym (b) przyspieszeniem.



a b

Widać z nich, że gdy w ruchu jednostajnie zmiennym żadna z prędkości nie jest uprzywilejowana, to przy rosnącym przyspieszeniu prędkość w czasie ruchu jest bliska prędkości początkowej znacznie dłużej niż prędkości końcowej. Należałoby więc przy uśrednianiu przywiązać większą wagę do tej prędkości, przy której przyspieszenie jest mniejsze. Jak to zrobić? Zaproponuj, Czytelniku, metodę i opisz ją w liście do Redakcji. Może uda Ci się uzyskać szybszą zbieżność niż przedstawiona powyżej. Najciekawsze propozycje wydrukujemy.