O metodzie okrężnej

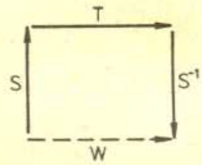
Dr Grzegorz ŁUKASZEWICZ, Mgr Marek SZAFRAŃSKI

1. Ogólne cechy metody

Metoda okrężna jest zasadą heurystyczną pomocną przy rozwiązywaniu różnorodnych zadań. Istota metody sprowadza się do zastąpienia postawionego przed nami problemu innym, równoważnym mu problemem, który następnie rozwiązujemy w trzech kolejnych etapach. Najogólniej rzecz ujmując – pierwszy krok metody polega na przejściu od problemu otwartego do pokrewnego mu zadania, które potrafimy rozwiązać. Drugim krokiem jest rozwiązanie tak przeformułowanego zadania. W kroku trzecim powracamy do zadania wyjściowego wykorzystując rezultaty drugiego kroku (w pewnym sensie trzeci krok jest więc odwrotnością pierwszego). W ten sposób zastępujemy operację bezpośredniego rozwiązywania problemu, nazwijmy ją W, złożeniem trzech opisanych wyżej operacji, które oznaczymy odpowiednio przez S, T oraz S^{-1}. Powyższy rozkład wyjściowego zadania możemy teraz wyrazić w postaci następującego złożenia

$$(*) \qquad W = S^{-1}TS,$$

co stanowi symboliczny zapis schematu metody okrężnej. Bardziej obrazowe przedstawienie graficzne schematu metody (rys. 1) uzasadnia jej nazwę. Jeżeli dowolne przekształcenia (operacje) W oraz T są w relacji (*) wraz z pewnym odwracalnym przekształceniem S, to mówimy, że W i T są sprzężone za pomocą S. Czasami wygodniej nam będzie zapisywać sprzężenie (*) w formie: $W \sim_S T$.



Rys. 1

Okazuje się, że taka dekompozycja zadania ma niezwykle szeroki zakres zastosowań, wykraczający znacznie poza zagadnienia czysto matematyczne. Zilustrujemy to prostym przykładem. Przypuśćmy, że postawiono przed nami niewykonalne na pozór zadanie przeniesienia wody w sicie. Mając na uwadze naszkicowaną ideę postępujemy tak: najpierw zamrażamy wodę, następnie przenosimy w sicie lód, który w końcu rozmrażamy. Przykład ten, jakkolwiek nieco żartobliwy, dobrze ilustruje cechy charakterystyczne metody: trójetapowość procesu oraz wzajemną odwrotność jego dwóch skrajnych etapów.

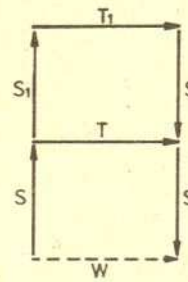
Rzymska legenda podaje, iż westalka Tuccia oskarżona o cudzołóstwo przeniosła w cudowny sposób wodę w sicie dowodząc tym swojej niewinności.

Relacja sprzężenia przekształceń jest dobrze znana i szeroko stosowana w wielu działach matematyki i jako taka nie wymaga rekomendacji. Czytelnikowi należy się zatem uzasadnienie podjęcia tego tematu w niniejszym artykule.

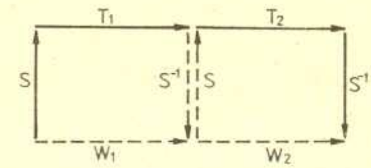
Otóż, po pierwsze, mimo szerokiego rozpowszechnienia samej idei jej jedność i uniwersalność pozostają skryte bogactwem form i różnorodnością nazw, jakie przybiera ona w różnych dziedzinach, na gruncie których się pojawia. Mówimy zatem o podobieństwie (algebra liniowa), o sprzężeniu (teoria grup przekształceń), o transformacjach całkowych (równania różniczkowe) etc., lecz idea tkwiąca u podstaw każdego z tych pomysłów jest jedna.

Wydaje się, że ujęcie omawianej idei w ramy pewnej metody heurystycznej jest dostatecznie ogólnym punktem widzenia, dającym możliwość jej efektywnego zastosowania na różnych polach i pozwalającym na systematyzację wielu pozornie odmiennych zagadnień.

Po drugie, sprzężenie jako relacja równoważności posiada szereg matematycznie oczywistych własności, takich jak
(i) $W \sim_I W$,
(ii) $W \sim_S T \Longrightarrow T \sim_{S^{-1}} W$,
(iii) $(W \sim_S T \;\&\; T \sim_{S_1} T_1) \Longrightarrow W \sim_{S_1 S} T_1$
oraz specyficzną dla niej własność:
(iv) $(W_1 \sim_S T_1 \;\&\; W_2 \sim_S T_2) \Longrightarrow W_2W_1 \sim_S T_2T_1$.



Rys. 2



Rys. 3

Własności (i)–(iv) opisują pewne cechy strukturalne metody decydujące o jej użyteczności. Dzięki nim uzyskujemy dodatkowe narzędzia ułatwiające analizę rozpatrywanego zadania. Zwracamy uwagę, że w zastosowaniach trudność bezpośredniego rozwiązania zadania W jest zwykle skupiona w jednym z elementów S, T lub S^{-1}. Często, jeśli S zawiera w sobie „genialnie prosty pomysł", S^{-1} wymaga „fundamentalnego twierdzenia z długim dowodem". W dalszym ciągu prezentujemy pewną liczbę przykładów (głównie matematycznych, z zasady łatwych bądź znanych), których cechą wspólną jest użycie metody okrężnej jako wytrychu pozwalającego otworzyć zamknięte drzwi. Prostota niektórych z nich jest zamierzona i nie powinna skłaniać do uznania samej idei za całkiem trywialną.

2. Przykłady zastosowań

P1. Geodezyjne na stożku. Zadanie polega na połączeniu punktów A i B na powierzchni stożka (na dowolnej powierzchni prostowalnej) najkrótszą linią leżącą w całości na tej powierzchni, tj. linią geodezyjną. W poniższym przepisie na rozwiązanie tego zadania łatwo dostrzec schemat metody okrężnej:
1) rozwinąć powierzchnię,
2) połączyć odcinkiem prostej punkty A i B na rozwiniętej powierzchni,
3) zwinąć powierzchnię z powrotem.

P2. Przekaz komunikatów na odległość. Bezpośredni przekaz W komunikatu słownego od nadawcy A do znacznie oddalonego odbiorcy B zostaje w praktyce telekomunikacyjnej zastąpiony złożeniem trzech następujących etapów:
S – przetworzenie mowy na sygnał elektryczny (mikrofon),
T – przesłanie sygnału elektrycznego (kabel, linia telefoniczna),
S^{-1} – odtworzenie sygnału akustycznego (głośnik).

W sytuacji, gdy połączenie punktów A i B linią przesyłową jest niemożliwe bądź nieopłacalne, etap T podlega dalszemu rozkładowi, w którym występuje
S_1 – emisja fali elektromagnetycznej (nadajnik),
T_1 – propagacja fali (ośrodek),
S_1^{-1} – detekcja (odbiornik).
Ostatecznie mamy więc

$$W = S^{-1}TS = S^{-1}(S_1^{-1}T_1S_1)S = (S_1S)^{-1}T_1(S_1S)\,.$$

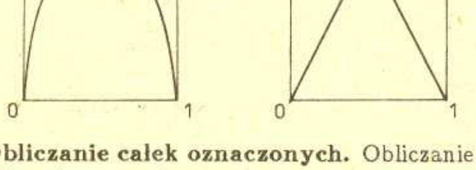
Przykład ten ilustruje metodę nakładania pętli okrążeń wyrażoną przez własność (iii).

P3. Potęgowanie macierzy symetrycznej.
Z własności (iv) wynika natychmiast implikacja
(iv') $W \sim_S T \Longrightarrow W^m \sim_S T^m \qquad (W^m = \underbrace{WW\ldots W}_{m\text{ razy}})$
mająca ważne zastosowania przy iteracjach przekształceń, np. przy potęgowaniu macierzy. Dla dowolnej macierzy symetrycznej W wymiaru n istnieje taka nieosobliwa macierz S, że zachodzi związek $W = S^{-1}TS$, gdzie T jest pewną macierzą diagonalną: $T = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Chcąc obliczyć macierz $W^m = WW\ldots W$, znajdujemy najpierw macierz diagonalną T, której potęgę wyznaczamy z łatwością: $T^m = diag(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$. W ostatnim kroku obliczamy potęgę macierzy W według wzoru $W^m = S^{-1}T^mS$ w myśl własności (iv').

P4. Dyskretne układy dynamiczne. Innym przykładem dotyczącym iteracji przekształceń jest badanie dyskretnych układów dynamicznych na odcinku jednostkowym. Problem polega tym razem na tym, aby mając dane przekształcenie ciągłe $f : [0,1] \to [0,1]$, np. $f(x) = 4x(1-x)$, $0 \le x \le 1$, opisać trajektorię dowolnego punktu x z tego odcinka, tj. ciąg $\left(f^n(x)\right)_{n=0}^{\infty}$. Okazuje się, że znalezienie ogólnego wzoru na n-krotne złożenie funkcji f przekracza nasze możliwości nawet w tak prostym przypadku jak przytoczony powyżej. Musimy zatem uciekać się do innych sposobów. Odpowiednio dobrana zmiana zmiennej, tj. bijekcja $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ ustala sprzężenie funkcji f z dostatecznie prostą funkcją g

$$f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi\,,$$

np. g może być kawałkami liniowa (piłokształtna) postaci: $g(y) = 2y$, gdy $y < \frac{1}{2}$ i $g(y) = 2 - 2y$, gdy $y \ge \frac{1}{2}$. Obie funkcje przedstawiono na rysunku 4. W odróżnieniu od f funkcja g potęguje się w sposób regularny: g^n ma także postać piłokształtną o 2^{n-1} „zębach". (Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do artykułu A. Zdunik „Chaos na odcinku", *Delta* 7/1984).



Rys. 4

P5. Obliczanie całek oznaczonych. Obliczanie całek sprowadza się często do zastosowania schematu metody okrężnej. W przypadku całki Gaussa

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

operacja W polega na obliczeniu wyrażenia I, S oznacza podnoszenie do kwadratu, S^{-1} pierwiastkowanie, a T polega na obliczeniu I^2, co pozwala na przejście od zadania jedno- do dwuwymiarowego

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\,.$$

Dzięki zwiększeniu wymiaru uzyskujemy wzbogacenie zasobu narzędzi, jakimi dysponujemy, w postaci współrzędnych biegunowych (r, θ) określonych w $\mathbf{R}^2$ wzorami

$$x = r\cos\theta\,, \quad y = r\sin\theta \quad (r \ge 0,\ 0 \le \theta < 2\pi)\,.$$

Teraz rachunek przebiega już łatwo

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr\,d\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi\,,$$

skąd $I = \sqrt{\pi}$.

Zauważmy na zakończenie tej serii przykładów, że nawet metoda dowodu „przez zaprzeczenie" (*a contrario*) ujawnia strukturę okrężną. W tym przypadku rolę operacji S spełnia negacja N, która jest inwolucją ($N^2 = Id$). Dlatego też w dowodzie tego typu negacja pojawia się dwukrotnie, raz jako S i raz jako S^{-1}.

3. Metoda okrężna jako heureza

Powyższe przykłady mogą skłonić Czytelnika do postawienia następującego pytania: jak – stojąc w obliczu nie rozwiązanego problemu – dobrać przekształcenie S pozwalające zainicjować zastosowanie metody. Naszym zdaniem można wyróżnić w sposób naturalny dwie zasady wskazujące przynajmniej na właściwy kierunek poszukiwań przekształcenia S. Dyrektywy te nazywamy w dalszym ciągu zasadą abstrakcji i zasadą strukturalizacji; wybór jednej z nich sugeruje sam problem stojący przed rozwiązującym.

3.1. Zasada abstrakcji polega na sprowadzeniu zadania niejako do „postaci kanonicznej". Chodzi tu mianowicie o uwypuklenie istoty trudności przez abstrahowanie od zaciemniających szczegółów, co może wiązać się z chwilową rezygnacją z pełnej ogólności rozważań. Dla ilustracji tej dyrektywy przytoczymy dwa przykłady.

P6. Równanie kwadratowe. Rozwiązanie równania kwadratowego można sprowadzić (za pomocą liniowej zmiany zmiennej) do pierwiastkowania, co ilustruje poniższy diagram.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{l}\text{postać ogólna}\\ ax^2+bx+c=0\\ b^2-4ac\ge 0\end{array}} \arrow[r, dashed, "W"] \arrow[d, "S_1"', "ax=u"] & \boxed{\begin{array}{l}\text{dwa pierwiastki}\\ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{postać}\\ \text{zredukowana}\\ u^2+bu+ac=0\end{array}} \arrow[d, "S_2"', "u+\frac{b}{2}=v"] & \boxed{\begin{array}{l}\text{dwa pierwiastki}\\ u_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-ac}\end{array}} \arrow[u, "S_1^{-1}"'] \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{pełny kwadrat}\\ v^2=\frac{b^2}{4}-ac\end{array}} \arrow[r, "T"] & \boxed{\begin{array}{l}\text{dwa pierwiastki}\\ v_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-ac}\end{array}} \arrow[u, "S_2^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

P7. Liniowe równanie różniczkowe. Naszkicujemy sposób rozwiązywania liniowego równania różniczkowego (jednorodnego) o stałych współczynnikach postaci:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Przyjmując oznaczenia:

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \quad \text{oraz} \quad b = (b_1, \ldots, b_n)^T$$

możemy zapisać to równanie wektorowo:

$$Df(x)b = 0, \qquad x \in \mathbf{R}^n.$$

Zakładamy przy tym, że $b \neq 0$. Rozwiązanie takiego równania polega na opisaniu zbioru wszystkich funkcji gładkich $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$, które spełniają punktowo to równanie. Za pomocą liniowego podstawienia

$$\overline{x} = Ax, \qquad x \in \mathbf{R}^n,$$

zadanego nieosobliwą macierzą A wymiaru $n \times n$, możemy przeformułować to równanie następująco:

$$D\overline{f}(\overline{x})\overline{b} = 0, \qquad \overline{x} \in \mathbf{R}^n,$$

gdzie: $\overline{b} = Ab$, $\overline{f} = f \circ A^{-1}$. Jeśli A jest macierzą takiego obrotu w $\mathbf{R}^n$, który nadaje wektorowi b kierunek pierwszego wektora bazowego $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$, tj.

$$\overline{b} = Ab = |b| \cdot e_1,$$

to równanie to zredukuje się do postaci kanonicznej

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{x}_1}(\overline{x}) = 0, \qquad \overline{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Takie równanie spełnione jest przez funkcje , które nie zależą od pierwszej zmiennej $\overline{x}_1$ (i tylko przez takie funkcje). Zatem rozwiązanie ogólne wyjściowego równania stanowią funkcje postaci:

$$f = \overline{f} \circ A,$$

gdzie $\overline{f}$ jest dowolną funkcją gładką niezależną od pierwszej zmiennej.

3.2. Zasada strukturalizacji polega na takim przeformułowaniu problemu, które wzbogaca ubogie – lub ujawnia ukryte – własności strukturalne zadania. Dobrze ilustruje to przykład 5, w którym przejście do wyższych wymiarów umożliwiło nam skorzystanie z narzędzi nie mających jednowymiarowych odpowiedników. Aby lepiej wyjaśnić powyższe lakoniczne streszczenie tej dyrektywy, prezentujemy kolejne dwa przykłady.

P8. Szereg liczbowy. Mamy wyznaczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Ponieważ szeregi funkcyjne mają bogatszą teorię niż liczbowe, wprowadzimy dodatkowy parametr x kładąc

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}.$$

Szereg powyższy jest (jako szereg potęgowy) bezwzględnie zbieżny i różniczkowalny na przedziale $(-2, 2)$. Wyjściowe zadanie polega w tym kontekście na znalezieniu wartości $S(1)$. Należy zauważyć, że szereg pochodnych jest szeregiem geometrycznym, a więc jego suma może być jawnie obliczona:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{2-x},$$

$$\text{skąd} \quad S(x) = \int_0^x S'(u)\,du = \int_0^x \frac{du}{2-u} = -\ln(2-x) + \ln 2.$$

Mamy więc ostatecznie $S(1) = \ln 2$.

Czytelnik z łatwością dopatrzy się tu schematu dwustopniowego $W = S_1^{-1} S_2^{-1} T S_2 S_1$, w którym przyjęto następujące oznaczenia:
W – sumowanie szeregu wyjściowego,
S_1 – wprowadzenie parametru,
S_2 – różniczkowanie,
T – sumowanie szeregu geometrycznego,
S_2^{-1} – całkowanie,
S_1^{-1} – usunięcie parametru (obliczenie wartości funkcji w punkcie).

P9. Trójkąty pitagorejskie. Ten klasyczny problem polega na opisaniu zbioru wszystkich trójek (a, b, c) liczb całkowitych, które spełniają wzór Pitagorasa

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pomijając jedno oczywiste rozwiązanie – trójkę trywialną $(0, 0, 0)$ – wszystkie pozostałe spełniają równanie

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Dla względnie pierwszych a, b, c problem sprowadza się zatem do opisania zbioru X punktów okręgu jednostkowego o obu współrzędnych wymiernych

$$X = S^1 \cap \mathbf{Q}^2.$$

Nasuwa to nam myśl znalezienia takiej parametryzacji okręgu S^1, przy której wszystkie (i tylko takie) punkty będą wyróżnione. Do takiej parametryzacji prowadzą znane tożsamości trygonometryczne

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Mianowicie w interesującej nas sytuacji tangensy te są liczbami wymiernymi. Szukamy więc takich liczb wymiernych w, by

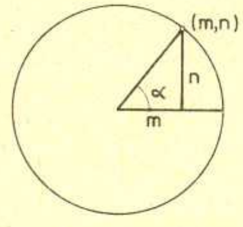
$$\cos 2\alpha = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2w}{1 + w^2},$$

a zatem szukamy rozwiązań równania

$$\left(\frac{1 - w^2}{1 + w^2}\right)^2 + \left(\frac{2w}{1 + w^2}\right)^2 = 1,$$

czyli

$$(1 - w^2)^2 + (2w)^2 = (1 + w^2)^2.$$



Rys. 5

Jeśli więc $w = \frac{m}{n}$, to mamy

$$(n^2 - m^2)^2 + (2nm)^2 = (n^2 + m^2)^2.$$

Zatem wszystkie względnie pierwsze trójki (a, b, c), spełniające wzór Pitagorasa, są postaci

$$(n^2 - m^2, 2nm, n^2 + m^2),$$

a wobec tego wszystkie takie trójki to

$$\left(k(n^2 - m^2), 2knm, k(n^2 + m^2)\right), \quad \text{dla } k, n, m \in \mathbf{N}$$

(aby się przekonać o konieczności wprowadzenia współczynnika k, wystarczy rozpatrzyć trójkę $(9, 12, 15)$).

4. Uwagi końcowe

Na zakończenie wymienimy w telegraficznym skrócie kilka hasłowych przykładów. Interpretacje ich, w kontekście metody okrężnej, pozostawiamy bardziej zaawansowanym Czytelnikom w charakterze pożytecznego ćwiczenia. A oto zapowiedziane przykłady:

P10. Znajdowanie rozwiązań równań różniczkowych (transformata Fouriera, równanie algebraiczne, odwrotna transformata Fouriera (wzbogacona o teorię całek osobliwych)).

P11. Dowody istnienia rozwiązań równań różniczkowych (przestrzenie Sobolewa (Biesowa, inne), dowody dla rozwiązań uogólnionych, twierdzenia „o włożeniu" (Sobolewa, inne)).

P12. Obniżanie rzędu układu równań (układ równań Lagrange'a, inwolutywne przekształcenie Legendre'a, wspaniale symetryczny układ równań Hamiltona).

Na tym zakończymy prezentację zebranych przykładów w nadziei, iż stanowią one dostateczną ilustrację metody okrężnej.

Autorzy pragną wyrazić serdeczne podziękowania prof. Z.A. Melzakowi z University of British Columbia w Vancouver, Kanada, za jego uwagi na temat heurystyki matematycznej w ogóle, a w szczególności metody okrężnej, które były inspiracją do napisania niniejszego tekstu. Nazwa „metoda okrężna" jest próbą znalezienia polskiego odpowiednika dla angielskiego terminu *bypass* użytego w omawianym kontekście przez prof. Melzaka w jego interesującej książce pt. *Bypasses. A simple approach to complexity*, J. Wiley and Sons, 1983, do której odsyłamy Czytelników zainteresowanych rozwinięciem poruszonych tematów.

Patrz w niebo

Fizyka cząstek elementarnych coraz częściej znakomicie wspomaga astronomię – nawet więcej: współczesna astronomia bez fizyki cząstek elementarnych nie mogłaby istnieć. Przecież choćby tak podstawowa sprawa, jak „dlaczego gwiazdy świecą", zawdzięcza swoje wyjaśnienie właśnie rozwojowi fizyki mikroświata. Korzyści w drugą stronę są zresztą też oczywiste, mianowicie to Wszechświat tu i ówdzie stwarza cząstkom elementarnym takie warunki, jakich fizycy długo jeszcze (albo i nigdy) nie wytworzą w żadnym laboratorium.

Astronomowie i fizycy są jednakowo zainteresowani neutrinami. Te znane od dawna cząstki są nadal tak tajemnicze, że nawet nie ma pewności, czy ich masa jest zerowa czy nie. A to ma ogromne znaczenie dla przyszłych losów Wszechświata. Gdyby masa neutrin była dostatecznie duża, to znaczyłoby, że gęstość Wszechświata jest większa niż nam się teraz wydaje, może nawet większa od krytycznej, tzn. obecne rozszerzanie się Wszechświata może kiedyś ustanie i zacznie się jego kurczenie. Tak więc masa neutrin może mieć znaczenie wręcz „ostateczne".

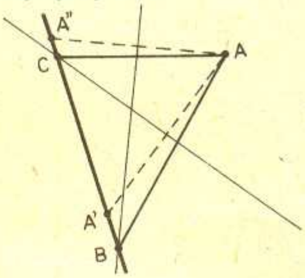
Ale ciekawych zagadnień nie trzeba szukać aż tak daleko. Nasze spokojne i poczciwe skądinąd Słońce kryje jeszcze niejedną zagadkę. Jak wiadomo, Słońce emituje mniej neutrin, niż należałoby oczekiwać na podstawie naszej aktualnej o nim wiedzy. Ogromna większość neutrin słonecznych powstaje w jednej z bocznych gałęzi reakcji proton-proton, w której produkowana jest głównie energia. Uważa się, że aby teoretyczny strumień neutrin był równy obserwowanemu, temperatura centralna Słońca powinna być nieco niższa niż to wynika ze współczesnych modeli gwiazdy. Tempo produkcji neutrin w owej bocznej gałęzi cyklu p–p jest, na szczęście, bardzo czułe na temperaturę, można więc uzgodnić je z obserwowanym strumieniem neutrin niewiele zmieniając tempo produkcji samej energii. I wszystko byłoby w porządku, gdyby znalazł się rozsądny powód, by temperaturę centralną obniżyć.

Otóż powód taki został zaproponowany. Amerykańscy fizycy, William Press i David Spergel, wysunęli hipotezę, że pewne cząstki przewidywane przez nie sprawdzone dotychczas teorie w rodzaju „wielkiej unifikacji" czy „supersymetrii" mogą rozwiązać ten problem. Cząstki te, zwane kosmionami lub wimpami (od *Weakly Interacting Massive Particles* – słabo oddziałujące masywne cząstki), obecne w Słońcu w ilości jedna na bilion innych, ułatwiałyby transport energii z wnętrza Słońca. W rezultacie Słońce mogłoby mieć obserwowaną moc przy nieco niższej temperaturze wnętrza i problem neutrin zostałby rozwiązany.

Oczywiście, to co tu powiedzieliśmy, jest niesłychanie gołosłowne i Czytelnik nadal nie wie, „jak jest naprawdę". Ale nie wiedzą tego również rozliczni specjaliści i zresztą nie w tym rzecz. Nierozstrzygniętych zagadek jest bez liku, a chciałem na przykładzie słonecznych neutrin pokazać, jak ważny i „interdyscyplinarny" może być marginesowy, zdawałoby się, problem pochodzący z naszego najbliższego otoczenia.

dr Tomasz KWAST

Rozwiązanie zadania M 543.
Niech A będzie danym wierzchołkiem. Przekształcając A przez symetrię względem każdej z danych dwusiecznych otrzymujemy punkty A' i A'', które leżą na prostej zawierającej bok trójkąta. W oczywisty sposób znajdujemy B i C.



Konstrukcja ta jest możliwa, jeśli dwusieczne dzielą płaszczyznę na kąty ostre.

Rozwiązanie zadania F 268.
Ocenę można łatwo przeprowadzić dla cząstek opuszczających słup ze średnią prędkością

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

skierowaną prostopadle do powierzchni słupa. Pole magnetyczne w pobliżu powierzchni słupa (walca) wynosi

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

W tym polu cząstki wylatujące z obszaru wysokiej temperatury będą poruszać się po okręgu, którego promień otrzymamy z relacji

$$\frac{mv^2}{r} = evB.$$

Stąd otrzymujemy

$$I = \frac{2\pi R}{\mu_0 e r}\sqrt{\frac{3kT}{m}} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ A}.$$