Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1989

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 177 (WT=1,47) i 178 (WT=3,18)
z numeru 10/1988

Grzegorz Zakrzewski	– Trzcianka	47,86	pkt
Rafał Latała	– Warszawa	43,99	pkt
Zbigniew Surduka	– Czechowice	43,71	pkt
Edward Orzechowski	– Warszawa	43,68	pkt
Adam Przeździecki	– Warszawa	42,85	pkt
Kazimierz Serbin	– Sanok	41,76	pkt
Piotr Kumor	– Olsztyn	41,16	pkt

Pan Zakrzewski kończy drugie okrążenie.

Rozwiązanie zadania M 542.
Przekształcimy nierówność do postaci

$$(*)\qquad 1 \le xe^{-x} + e^{x^2-x}.$$

Pochodna prawej strony wynosi

$$(1-x)e^{-x} + (2x-1)e^{x^2-x};$$

jest równa zeru, gdy

$$(**)\qquad e^{x^2} = \frac{x-1}{2x-1}.$$

Wykażemy, że jedynym rozwiązaniem tego równania jest $x = 0$.
Dla $x < 0$ mamy

$$e^{x^2} > 1 > \frac{x-1}{2x-1},$$

dla $x > 1/2$ mamy

$$e^{x^2} > 1 > \frac{1}{2} > \frac{x-1}{2x-1}.$$

Mamy też dla $x < 1/2$

$$\frac{x-1}{2x-1} > 1 + x.$$

Funkcja e^{x^2} jest wypukła, a zatem w przedziale $(0, 1/2)$ jej wartości są mniejsze niż wartości funkcji liniowej przyjmującej w punktach 0 i 1/2 te same wartości co e^{x^2}. Wystarczy teraz zauważyć, że

$$e^{(1/2)^2} = e^{1/4} < 4^{1/4} < 1 + \frac{1}{2},$$

by stwierdzić, że na przedziale $(0, 1/2]$ mamy

$$e^{x^2} < \frac{x-1}{2x-1}.$$

Jedynym rozwiązaniem $(**)$ jest więc $x = 0$. Jedynym punktem, w którym prawa strona $(*)$ może mieć ekstremum, jest $x = 0$. Ponieważ

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(xe^{-x} + e^{x^2-x}\right) = \infty,$$

musi to być minimum. Dowód został zakończony.
Uwaga. Ciekawe, jaka jest najmniejsza stała a, dla której

$$e^x \le x + e^{ax^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z matematyki nr 191, 192

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

191. Wyznaczyć liczbę permutacji $(x_1, \ldots, x_{30})$ zbioru $\{1, \ldots, 30\}$ spełniających warunki:

$$x_{i-2} < x_i \quad \text{dla} \quad 3 \le i \le 30, \qquad x_{i-3} < x_i \quad \text{dla} \quad 4 \le i \le 30.$$

192. Dowieść, że dla każdej trójki liczb dodatnich a, b, c jest spełniona nierówność

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a+b+c}{3}.$$

Zadanie **192** zaproponował pan Werner Mnich z Opola.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1989

Przypominamy treść zadań:

183. Czy istnieje sześciokąt wypukły, którego pole S oraz średnica d spełniają zależność $3S > 2d^2$?
184. Dane $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, 44)$; $\sum x_i = \sum x_i^2 = 44$. Dowieść, że $\sum x_i^{44} \ge 44$.

183. Sześciokąty takie istnieją. Oto dwa przykłady:

1) Sześciokąt o wierzchołkach $A = (20, 0)$, $B = (0, 25)$, $C = (-27, 17)$, $D = (-30, 0)$, $E = (-27, -17)$, $F = (0, -25)$. Średnica $d = 50$; pole $S = 1685$.

2) Do boku CE pięciokąta foremnego $ABCEF$ o przekątnej długości d doklejamy trójkąt równoramienny CDE ($|CD| = |DE|$) taki, że $|AD| = d$. Powstaje sześciokąt o polu równym w przybliżeniu $0,672 \cdot d^2$.

Dla obu tych sześciokątów spełniona jest nierówność $3S > 2d^2$.

Uwaga. Te przykłady ilustrują następującą ogólniejszą konstrukcję: niech $A = (a, 0)$, $B = \left(0, \frac{1}{2}d\right)$, $D = (a - d, 0)$, $F = \left(0, -\frac{1}{2}d\right)$, gdzie $\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) d \le a \le \frac{1}{2}\sqrt{3}d$ (po to, by długości boków czworokąta $ABDF$ nie przekraczały d); umieszczamy punkty C i E odpowiednio w II i III ćwiartce układu współrzędnych „tak daleko, jak się da", by średnica sześciokąta $ABCDEF$ nie przekroczyła d (tj. tak, żeby $|AC| = |AE| = |BE| = |CF| = d$). Można obliczyć, że wówczas $C = (x, y)$, $E = (x, -y)$, gdzie $x = \frac{1}{4}(2a - \lambda d)$, $y = \frac{1}{4}(2\lambda a - d)$, $\lambda = \sqrt{(15d^2 - 4a^2)/(d^2 + 4a^2)}$, oraz że $8S = (d^2 + 4da - 4a^2)\lambda + 2d(2a - d)$. Stosunek S/d^2 przekracza 2/3 dla a z przedziału $(\alpha d; \beta d)$, gdzie $\alpha = 0,335\ldots$, $\beta = 0,477\ldots$ i osiąga maksimum $0,67498\ldots$ dla $a = \gamma d$, $\gamma = 0,402\ldots$ (wartości przybliżone).

W szczególności, przyjmując $d = 50$, $a = 20$ (czyli $a/d = 0,4$) otrzymujemy $x = -26,98\ldots$, $y = 17,09\ldots$, co po nieznacznym zaokrągleniu daje pierwszy z podanych wyżej przykładów. Przykład drugi odpowiada wzięciu wartości $a/d = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} = 0,363\ldots$.

Nie wiemy, czy wzmiankowane wyżej maksimum w obrębie klasy sześciokątów otrzymanych w wyniku opisanej konstrukcji stanowi globalne maksimum wartości S/d^2 w klasie wszystkich sześciokątów wypukłych.

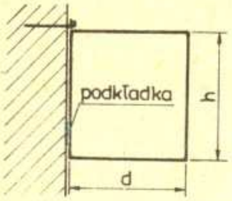
184. Korzystamy z nierówności Bernoulliego ($(1+t)^k \ge 1 + kt$ dla $t > -1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$):

$$\sum x_i^{44} = \sum x_i\left(1 + (x_i - 1)\right)^{43} \ge \sum x_i\left(1 + 43(x_i - 1)\right) =$$
$$= \sum x_i(43x_i - 42) = 43\sum x_i^2 - 42\sum x_i = 44.$$

Zadania z fizyki nr 89, 90

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

89. Prostopadłościenną szafkę o wysokości $h = 0,5$ m i głębokości $d = 0,4$ m pragniemy zawiesić na dwóch hakach umieszczonych w ścianie. Proste, długie haki stalowe są luźno osadzone w poziomych otworach wywierconych w betonowej ścianie. Szafkę wieszamy za pomocą zaczepów zamocowanych w jej górnych narożach, a dla ustalenia punktów styku „pleców" szafki ze ścianą stosujemy cienkie podkładki (rys. 1), które mogą mieć współczynnik tarcia f_1 od wartości zaniedbywalnie małej do 0,75. Jaką wartość współczynnika tarcia należy dobrać i w którym miejscu przytwierdzić podkładki, aby zminimalizować niebezpieczeństwo wyciągnięcia haków ze ściany przez szafkę? Przyjmujemy, że środek ciężkości szafki pokrywa się z jej środkiem geometrycznym, a współczynnik tarcia stali o beton wynosi $f_2 = 0,5$. Czy zastosowanie dodatkowych haków podpierających dolną, przyścienną krawędź szafki mogłoby poprawić sytuację?



Rys. 1

90. Czy można tak dobrać wilgotność otoczenia (powietrza) i średnicę kropel wody, aby krople te całkowicie zamieniały się w parę nie pobierając ciepła z otoczenia? Napięcie powierzchniowe wody w temperaturze 300 K wynosi $\sigma = 7,2 \cdot 10^{-2}$ J/m^2, ciepło parowania wody – $r = 2,4 \cdot 10^6$ J/kg.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 75 (WT=1,46) i 76 (WT=2,97) z numeru 10/1988

Adam Sikorski	– Lublin	41,39 pkt
Roman Musiał	– Katowice	39,76 pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	37,74 pkt
Wiesław Kacprzak	– Kraków	36,17 pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	34,59 pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	30,12 pkt
Aleksander Surma	– Myszków	29,71 pkt
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	24,86 pkt
Tomasz Wietecha	– Tarnów	22,34 pkt

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1989

Przypominamy treść zadań:

81. Mając naczynie z kwasem siarkowym nieco rozcieńczonym i drugie z wodą destylowaną, chcemy sporządzić w trzecim naczyniu roztwór kwasu o znanym stężeniu. Jedyny przyrząd pomiarowy, jakim dysponujemy, to zegarek ze stoperem. Ponadto mamy jeszcze długą, wąską probówkę obciążoną u dołu, która w obu cieczach pływa w pozycji pionowej. W jaki sposób możemy wyznaczyć stężenie sporządzonego roztworu?

82. Równoległa wiązka światła pada na całą płaską powierzchnię szklanego półwalca pod kątem 45°, w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi. Z jakiej części bocznej powierzchni półwalca wychodzi światło, jeśli współczynnik załamania światła dla szkła wynosi n?

81. Stężenie kwasu siarkowego w roztworze określamy na podstawie jego gęstości. Jeśli ρ_w oznacza gęstość wody, ρ_k – gęstość czystego kwasu, natomiast s – stężenie „wagowe" roztworu (masę kwasu w jednostce objętości roztworu), to gęstość roztworu – przy założeniu, że objętość roztworu jest równa sumie objętości wody i kwasu – wynosi

(1) $$\rho_r = \rho_w + s(\rho_k - \rho_w)/\rho_k .$$

Do wyznaczenia gęstości wykorzystamy pionowe drgania pływającej w cieczy probówki. Zmiana siły wyporu przy wychyleniu takiego pływaka z położenia równowagi o Δx wynosi $\Delta F = \rho g S \Delta x$, gdzie ρ – gęstość cieczy, g – przyspieszenie ziemskie, S – pole poprzecznego przekroju probówki. Okres drgań pływaka T obliczamy analogicznie jak dla ciężarka zawieszonego na sprężynie, otrzymując wzór

(2) $$T = 2\pi\sqrt{m/(Sg\rho)} .$$

W tym przypadku jednak m oznacza masę pływaka powiększoną o pewną wielkość, wyrażającą bezwładność samej cieczy (która również ulega przyspieszaniu podczas drgań pływaka). Nie znając wszystkich wielkości we wzorze (2) wyznaczamy gęstość roztworu na podstawie pomiaru okresu drgań pływaka w roztworze (T_r) oraz w wodzie (T_w)

$$\rho_r = \rho_w (T_w/T_r)^2 .$$

Ze wzoru (1) uzyskujemy bezpośrednią zależność między okresem drgań pływaka w roztworze kwasu a jego stężeniem.

Rys. 2

82. Wiązka promieni załamanych na płaskiej powierzchni półwalca biegnie w szkle pod kątem

$$\beta = \arcsin \frac{\sin\alpha}{n} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n}$$

względem normalnej do tej powierzchni (rys. 2).

Przez powierzchnię cylindryczną wyjdą ze szkła promienie, dla których kąt padania γ na tę powierzchnię jest mniejszy od kąta granicznego

$$\gamma_g = \arcsin \frac{1}{n} .$$

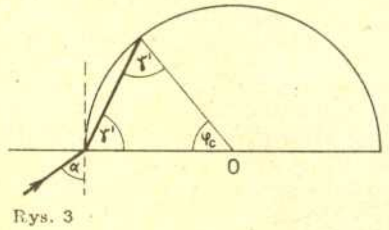
Z rysunku widać, że skrajne wartości kąta φ, odpowiadające punktom granicznym A i B, są określone przez związki:

$$\varphi_A = \frac{\pi}{2} + \beta - \gamma_g , \qquad \varphi_B = \frac{\pi}{2} + \beta + \gamma_g .$$

Stąd znajdujemy przedział kątów φ, dla których światło wychodzi na zewnątrz

$$\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n} - \arcsin \frac{1}{n} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n} + \arcsin \frac{1}{n} .$$

Oczywiście, kąt φ nie może przyjmować wartości większych od π. Z drugiej strony przedział kątów φ ograniczony jest od dołu wartością kąta φ_c, poniżej którego występuje obszar cienia (rys. 3)



Rys. 3

$$\varphi_c = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}n} ,$$