

## Szacowanie

Jeżeli oznaczymy boki trójkąta przez  $a, b, c$  i odpowiadające im środkowe przez  $k, l, m$ , to rozpatrując trójkąty takie, jak na rysunku 1, otrzymamy sześć nierówności postaci takiej, jak

$$\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}l > \frac{1}{2}a,$$

co po zsumowaniu daje

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma środkowych}).$$

Rozpatrując trójkąty takie, jak na rysunku 2, otrzymujemy sześć nierówności postaci

$$a + \frac{1}{2}b > l,$$

które po zsumowaniu dają

$$(\text{suma środkowych}) < \frac{2}{3} \cdot (\text{obwód}).$$

Łącznie zatem mamy

$$(*) \quad \frac{1}{2} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma środkowych}) < \frac{3}{2} \cdot (\text{obwód}).$$

Oszacowaliśmy zatem sumę środkowych przez obwód trójkąta. Czy oszacowanie (\*) można poprawić? Oczywiście, tak. Sumując 3 nierówności (rys. 3) postaci

$$\frac{2}{3}k + \frac{2}{3}l < a$$

poprawiamy współczynnik w dolnym oszacowaniu z  $\frac{1}{2}$  na  $\frac{3}{4}$ . Współczynnik w górnym oszacowaniu też daje się poprawić. Odbijając trójkąt kolejno względem środków boków (jak na rysunku 4) otrzymamy 3 nierówności postaci

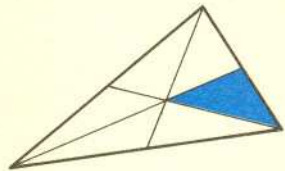
$$a + b > 2m,$$

co poprawia ten współczynnik z  $\frac{3}{2}$  na 1. Zatem nierówność (\*) można zastąpić mocniejszą:

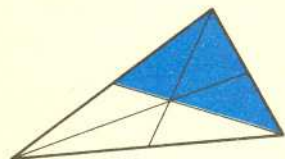
$$\frac{3}{4} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma środkowych}) < (\text{obwód}).$$

A czy to oszacowanie można poprawić? „Dolny” współczynnik na pewno poprawić się nie da. Rozpatrując ciąg coraz to bardziej płaskich trójkątów równoramiennych o stałej podstawie  $a$  (rys. 5) stwierdzamy, że suma środkowych może być dowolnie bliska trzem czwartym obwodu. A „górny” współczynnik?

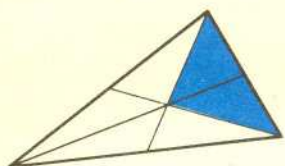
Podobne oszacowania można przeprowadzić dla sumy przekątnych wielokąta. I tam też można postawić pytanie, czy są one najlepsze. Dla czworokąta np. z czterech trójkątów takich, jak na rysunku 6, otrzymamy oszacowanie dolne, a z takich, jak na rysunku 7, oszacowanie górne.



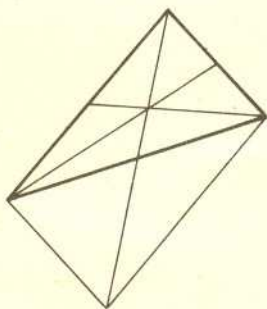
Rys. 1



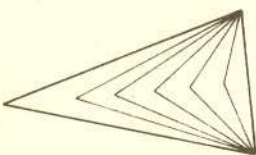
Rys. 2



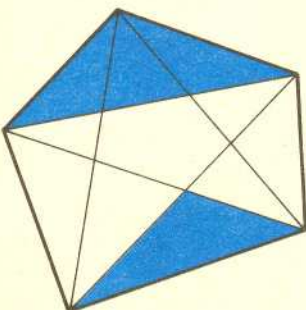
Rys. 3



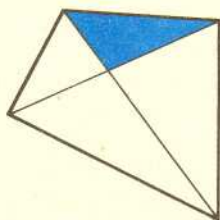
Rys. 4



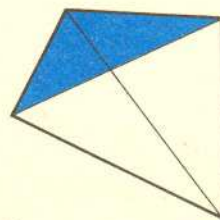
Rys. 5



Rys. 8



Rys. 6



Rys. 7

Łącznie więc, jako początek szacowania, będziemy mieli

$$\frac{1}{2} \cdot (\text{obwód}) < (\text{suma przekątnych czworokąta}) < (\text{obwód}).$$

I to możemy spróbować poprawić lub wykazać, że poprawić się nie da.

Dla pięciokąta (sumując, odpowiednio, po pięć nierówności otrzymanych z trójkątów takich, jak na rysunku 8) otrzymujemy oszacowanie

$$(\text{obwód}) < (\text{suma przekątnych pięciokąta}) < 2 \cdot (\text{obwód}).$$

Czy można je poprawić?

A jak uzyskać oszacowanie dla  $n$ -kąta?