Jeszcze jedna własność trójkątów równobocznych

Mgr Sławomir CYNK

Uczniom szkół średnich, przygotowującym się do egzaminu dojrzałości, znane jest zadanie:

Wyznaczyć wszystkie trójkąty, w których kąty tworzą ciąg arytmetyczny, a boki ciąg geometryczny.

Rozwiązanie nie jest trudne. Co się jednak stanie, gdy ktoś „przypadkowo" przestawi w treści zadania dwa słowa i sformułuje inny problem:

Wyznaczyć wszystkie trójkąty, w których kąty tworzą ciąg geometryczny, a boki ciąg arytmetyczny.

Otrzymane w ten sposób zadanie jest trudniejsze od oryginalnego i na maturę raczej się nie nadaje. Aby je rozwiązać, zajmijmy się zupełnie innym problemem.

Każdy, kto choć raz widział sinusoidę, wie, że funkcja „sinus" jest w przedziale $(0,\pi)$ wklęsła (lub, jak niektórzy mówią, „wypukła do góry"). Oznacza to, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in (0,\pi)$ zachodzi nierówność

$$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\sin x + \sin y}{2}.$$

Okazuje się, że prawdziwa jest podobna zależność dla średniej geometrycznej. Sformułujemy ją w postaci analogicznej nierówności, prawdziwej dla dowolnych liczb $x, y \in (0,\pi)$

$$\sin\sqrt{xy} \geq \sqrt{\sin x \sin y}.$$

Zanim jednak udowodnimy tę nierówność, wykażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\alpha \in (0;1)$ funkcja

$$g(t) = \frac{\sin t}{\sin \alpha t}$$

jest w przedziale $(0,\pi)$ funkcją malejącą. Różniczkując funkcję g uzyskujemy

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\sin\alpha t\cdot\cos t - \alpha\sin t\cdot\cos\alpha t}{(\sin\alpha t)^2} = \\ &= \frac{1}{(\sin\alpha t)^2}\big((1-\alpha)\sin t\cdot\cos\alpha t - (\sin t\cdot\cos\alpha t - \sin\alpha t\cdot\cos t)\big) \leq \\ &\leq \frac{1}{(\sin\alpha t)^2}(1-\alpha)t\left(\frac{\sin t}{t} - \frac{\sin(1-\alpha)t}{(1-\alpha)t}\right). \end{aligned}$$

Ponieważ $\frac{1}{(\sin t)^2}(1-\alpha)t > 0$, a funkcja $\frac{\sin t}{t}$ jest malejąca w przedziale $(0,\pi)$, więc pochodna funkcji g jest w przedziale $(0,\pi)$ niedodatnia, czyli funkcja g jest w tym przedziale malejąca.

Możemy teraz przejść do dowodu naszej nierówności.

Niech $x, y \in (0,\pi)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $x \leq y$. Liczba $\alpha = \sqrt{\frac{x}{y}}$ należy do przedziału $(0,1)$, więc funkcja $g(t) = \frac{\sin t}{\sin\alpha t}$ jest w przedziale $(0,\pi)$ malejąca. Ponieważ $\sqrt{xy} \leq y$, więc $g(\sqrt{xy}) \geq g(y)$, czyli

$$\frac{\sin\sqrt{xy}}{\sin x} \geq \frac{\sin y}{\sin\sqrt{xy}}.$$

Z ostatniej zależności, po prostych przekształceniach, otrzymujemy żądaną nierówność.

A teraz wróćmy do podanego na początku zadania.

Niech A, B, C będą kątami, a a, b, c bokami trójkąta o zadanych własnościach, wypisanymi w kolejności od największego do najmniejszego. Wtedy $2b = a + c$, $B = \sqrt{A\cdot C}$ oraz, na podstawie twierdzenia sinusów, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Korzystając z wypisanych powyżej faktów otrzymujemy

$$\sin A + \sin C = 2\sin B = 2\sin(\pi - B) = 2\sin(A+C).$$

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

NOWY RODZAJ PAMIĘCI W NOWYM KOMPUTERZE

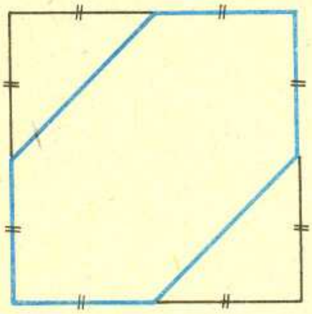
Steve Jobs — współzałożyciel znanej firmy komputerowej Apple i współtwórca popularnego mikrokomputera Macintosh jest obecnie właścicielem kolejnej firmy komputerowej NeXT. W październiku 1988 r. Jobs zaprezentował w USA pierwszy mikrokomputer opracowany przez NeXT. Jest on oparty na nowym, 32 bitowym mikroprocesorze Motoroli 68030 (25 MHz) z koprocesorem 68882 i zawiera w wersji standardowej pamięć 8 Mb (megabajtów). Do tego wszystkiego dołączony jest programowalny cyfrowy przetwornik sygnału — Motorola DSP56001 (20 MHz). Natomiast dla fizyka najciekawszą rzeczą w komputerze NeXT jest nowy rodzaj magnetooptycznego zapisu danych po raz pierwszy pojawiający się w sprzedaży. Dotychczas dostępne były dwa rodzaje optycznych dysków. Dyski, z których można tylko odczytywać dane (CD ROM), oraz dyski, na których można dane raz zapisać i wielokrotnie odczytywać (WORM). Na termomagnetooptycznym dysku zainstalowanym w komputerze NeXT możliwy jest zarówno zapis, jak i usuwanie wprowadzonych danych. Dyski pokryte są cienką warstwą aluminium oraz warstwą optycznie aktywnego materiału magnetycznego. Może to być bizmutek manganu MnBi, związki europu EuS i EuSe lub bardziej skomplikowane granaty magnetyczne zbudowane z samaru, itru, galu, żelaza i tlenu. Bardzo krótki, silny impuls światła lasera padający na niewielki obszar magnetyka (średnica wiązki może wynosić kilka mikrometrów) podgrzewa go powyżej tzw. temperatury Curie niszcząc istniejący zapis magnetyczny. W trakcie stygnięcia włączone jest pole magnetyczne, skierowane prostopadle do powierzchni dysku. W podgrzanych punktach powstaje trwałe, lokalne namagnesowanie odpowiadające zapisaniu informacji 0. Następnie kierunek pola magnetycznego zostaje odwrócony na przeciwny i laser ponownie podgrzewa wyróżnione punkty zapisując w tych punktach informację 1. Takich elementarnych komórek pamięci na 5¼ calowym dysku można obecnie umieścić około kilku miliardów. Całkowita pojemność dysku firmy NeXT wynosi więc 256 Mb plus dodatkowe 30% przeznaczone na zapisy kontrolne. Odczytywanie dysku wykonywane jest przez słabą spolaryzowaną wiązkę tego samego lasera. Wskutek tzw. zjawiska Faradaya płaszczyzna polaryzacji wiązki przechodzącej przez magnetyk i odbitej od aluminium ulega skręceniu zależnie od lokalnego namagnesowania. Zapis 0 lub 1 odpowiada przeciwnym kierunkom skręcenia płaszczyzny polaryzacji. Odbite światło analizuje układ zbudowany z polaryzatora i detektora. Należy sądzić, że ten nowy rodzaj zapisu termomagnetooptycznego zastąpi wkrótce szeroko obecnie stosowany, ale bardziej wrażliwy, zapis magnetyczny.

Równość tę możemy, stosując znane wzory, przekształcić w następujący sposób
$$2\sin\frac{A+C}{2}\,\cos\frac{A-C}{2} = 2\cdot 2\sin\frac{A+C}{2}\,\cos\frac{A+C}{2},$$
czyli
$$\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}.$$
Zatem
$$\sin\frac{B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+C}{2}\right) = \cos\frac{A+C}{2} =$$
$$= \cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{A+C}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}.$$
Ale na mocy udowodniónej nierówności wiemy, że
$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2} \le \left(\sin\sqrt{\frac{A}{2}\cdot\frac{C}{2}}\right)^2 = \left(\sin\frac{B}{2}\right)^2,$$
więc
$$\sin\frac{B}{2} \le 2\left(\sin\frac{B}{2}\right)^2,$$
skąd mamy
$$\sin\frac{B}{2} \ge \frac{1}{2}, \qquad \text{czyli} \qquad B \ge \frac{\pi}{3}.$$
Z drugiej strony $A+B+C=\pi$. Jednocześnie $A+C \ge 2\sqrt{AC}$ (przy czym równość zachodzi jedynie dla $A=C$), a zatem
$$\pi = A+B+C \ge 2\sqrt{AC}+B = 3B \ge \pi,$$
więc $A+C=2\sqrt{AC}$. Otrzymujemy stąd, że
$$A=C=B=\frac{\pi}{3}.$$
W ten sposób wykazaliśmy, że jedynym trójkątem, w którym boki tworzą ciąg arytmetyczny, a kąty ciąg geometryczny, jest trójkąt równoboczny.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 541. Wykazać, że istnieje przekształcenie afiniczne płaszczyzny przeprowadzające narysowany obok sześciokąt na sześciokąt foremny.
Rozwiązanie na str. 13



M 542. Udowodnić, że dla każdego x rzeczywistego
$$e^x \le x + e^{x^2}.$$
Rozwiązanie na str. 14

M 543. Skonstruować trójkąt mając dany wierzchołek i dwie proste zawierające dwusieczne nie przechodzące przez niego.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 268. Jednym ze sposobów otrzymywania wysokich temperatur, niezbędnych do przeprowadzenia kontrolowanej reakcji termojądrowej, jest tzw. magnetyczna termoizolacja. Ucieczka szybkich cząstek ze strefy o wysokiej temperaturze jest ograniczona polem magnetycznym. Ocenić wielkość natężenia prądu w słupie wyładowania gazowego o promieniu 3 cm niezbędną do tego, aby elektrony mające prędkość równą średniej kwadratowej prędkości ruchu termicznego, odpowiadającego temperaturze $T = 10^6$ K, nie były w stanie oddalić się od powierzchni słupa na odległość większą niż $r = 3\cdot 10^{-3}$ cm.
Rozwiązanie na str. 7

F 269. Prostoliniowy przewodnik znajduje się nad nadprzewodzącą płaszczyzną. W przewodniku płynie stały prąd. Zakładając jednorodną gęstość przewodnika $\rho = 2\cdot 10^{-3}$ kg/m należy znaleźć wysokości nad płaszczyzną, na jakiej zawiśnie ten przewodnik, jeśli popłynie w nim prąd $I = 20$ A.
Rozwiązanie na str. 3