

Mapy i dziwne atraktory

Dr hab. Ryszard KUTNER

Czy wiecie, że tradycyjna mechanika klasyczna Newtona przeżywa swoją drugą młodość? Spytacie – jakże to możliwe, aby w mechanice, dobrze nam przecież znanej np. ze szkolnego podręcznika, było coś jeszcze naprawdę do odkrycia? A jednak. W ramach klasycznej, lecz nieliniowej, mechaniki Newtona zaobserwowano na drodze eksperymentów komputerowych zupełnie nowe efekty, których istnienia domyślali się tylko nieliczni, jak H. Poincaré i A. Einstein.

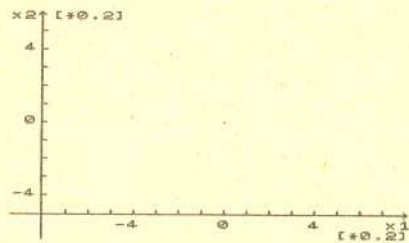
Szybkie mapowanie

W poprzednim artykule z tego cyklu (*Delta 2/1989*) mówiliśmy o chaosie w tak porządnym układach, w których na pierwszy rzut oka nie ma dla niego miejsca. Były to mianowicie tzw. układy hamiltonowskie, dla których możemy jawnie wypisać zarówno energię kinetyczną, jak też potencjalną. Mówiąc obrazowo, chociaż niezbyt ściśle, zajmowaliśmy się układami konserwatywnymi, nie kontaktującymi się z otoczeniem, a dokładniej ich ewolucją w przestrzeni fazowej. W tym celu konstruowaliśmy za pomocą programu komputerowego dwuwymiarową mapę Hénona-Heilesa dla konkretnego przypadku trzech nieliniowych, sprzężonych ze sobą oscylatorów (czyli układu o niewielkiej liczbie stopni swobody). Na drodze eksperymentu komputerowego obserwowaliśmy efekt polegający na tym, że konstruowana mapa, **powyżej pewnej progowej wartości energii całkowitej**, miała obok obszarów regularnych także obszary o przypadkowym rozrzucie punktów. Aby otrzymać ten wynik, musieliśmy jednak czekać długo, około 15 minut (i to w przypadku, gdy program pracował pod dobrym polskim kompilatorem języka BASIC, ToBoS-FP lub jego udoskonaloną wersją ToBoS-DYD na mikrokomputer np. ZX Spectrum 48k). Podobnie miała się rzecz z analizą profesjonalną: trzeba było czekać długo na wynik pracy nawet największych komputerów. I wtedy N.J. Zabusky (jeden ze współodkrywców solitonu) podsunął M. Hénonowi i C. Heilesowi pomysł, aby napisać algorytm pozwalający otrzymać wprost, punkt po punkcie, trajektorię leżącą na mapie nie analizując pełnej trajektorii układu w przestrzeni fazowej i zyskując tym samym znacznie na czasie. Chodziło zresztą nie tylko o to. Towarzystwo takiej procedurze głębokie pytanie: czy dysponując samą mapą można odtworzyć pełną przeszłość i przyszłość danego układu?

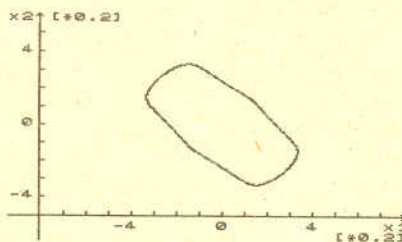
Przypatrzmy się zatem otrzymanej mapie (rys. 1) uzyskanej załączonym programem o nazwie MAPOWANIE – 2D. Obszar obejmowany przez mapę można podzielić na dwie różne części. Pierwsza z nich, wewnętrzna, jest uporządkowana i składa się z regularnych, zamkniętych trajektorii (z których wybraliśmy przykładowo dwie) oraz z punktu leżącego w środku. Eksperymentując wspomnianym programem zauważycie zapewne, że tego typu współśrodkowych krzywych (w obszarze ograniczonym od zewnątrz największą z nich) jest nieskończenie wiele. Co więcej, punkty należące do danej krzywej zapełniają ją jak gdyby chaotycznie. Jest to, jak się wydaje, jedyna nieregularność pojawiająca się w tej części. Druga część, na zewnątrz, ma już wyraźnie nieregularny charakter. Należy podkreślić, iż reprezentuje ona, tak jak i poprzednie, jedną trajektorię w przestrzeni fazowej. Właśnie tego typu trajektorie noszą nazwę **orbit stochastycznych** lub **ergodycznych**, o czym mówiliśmy już w poprzednim artykule.

Na potrzeby tego artykułu nie odróżnia się mapy, czyli pewnego odwzorowania, od tzw. cięcia Poincarého jako obrazu, tzn. rezultatu działania tego odwzorowania. Innymi słowy – mapę utożsamia się z cięciem Poincarého.

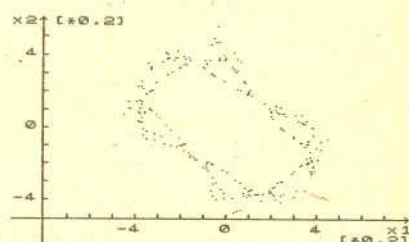
Współrzędna q1=0
Współrzędna q2=0



Współrzędna q1=0
Współrzędna q2=0.475



Współrzędna q1=0
Współrzędna q2=0.5



Rys. 1

Najdziwniejszymi ze znanych dotychczas map są tzw. dziwne atraktory (po polsku można by atraktor nazwać „ściągaczem”). Aby przybliżyć Wam pojęcie atraktora, posłużę się przykładem jednowymiarowego oscylatora harmonicznego tłumionego, czyli zanurzonej w cieczy kuleczki drgającej na liniowej (spełniającej prawo Hooke'a) sprężynie. Po wprawieniu w ruch kuleczki drgania będą miały charakter gasnący ze względu na występowanie oporu ośrodka. Jeżeli zobrazujemy ten ruch w przestrzeni fazowej, w której na osi poziomej odłożymy chwilowe położenie naszej masy, a na osi pionowej jej chwilowy pęd, to trajektoria fazowa przedstawiająca ewolucję naszego układu skończy się w punkcie, czyli zostanie jak gdyby do tego punktu ściągnięta. Punkt ten nazywamy właśnie atraktorem; fizycznie biorąc odpowiada on, oczywiście, spoczynkowi naszego wahadła. Jest to, rzecz jasna, najprostszy z atraktorów - punktowy. Nasuwa się np. pytanie o postać atraktora dla oscylatora harmonicznego swobodnego, czyli poruszającego się jedynie pod wpływem siły sprężystości. Jest to elipsa w przestrzeni fazowej należąca do kategorii tzw. atraktorów cyklicznych. Pytanie o atraktory dla kolejno napotykanym (np. w podręczniku szkolnym) układów fizycznych można stawiać dalej. Nie zawsze odpowiedź jest tak prosta jak powyżej. W tym artykule zajmiemy się dalej tylko takimi, którym nadano nazwę „dziwnych”.

Na początku lat sześćdziesiątych zdano sobie sprawę, iż atraktory mogą mieć bardzo skomplikowaną budowę tworząc ciasno upakowane w ograniczonym obszarze przestrzeni dziwne zakrzywione linie i płaszczyzny. Od tej właśnie „dziwności” pochodzi ich nazwa. Wśród dziwnych atraktorów można wyróżnić hiperboliczne - nie najgorzej już zbadane i niehiperboliczne - co do których wydaje się, że jesteśmy dopiero na początku żmudnych badań. W dalszym ciągu zajmiemy się dwoma szczególnie popularnymi dziwnymi atraktorami niehiperbolicznymi: tzw. atraktorem Hénona i chyba najslawniejszym z nich wszystkich - atraktorem Lorenza. Ciekawostką może być fakt, że dotychczas nie udało się ściśle wykazać, iż są to rzeczywiście atraktory. Wszystkie dotychczasowe przypuszczenia biorą się z tzw. eksperymentów komputerowych (symulacji). Nie udało się bowiem, jak dotychczas, odnaleźć takiej trajektorii, która wcześniej czy później nie zostałaby ściągnięta przez te atraktory.

Za pomocą programu MAPOWANIE 1-D można narysować atraktor Hénona (rys. 2), który jest obiektem jednowymiarowym. Pomiędzy liniami o numerach 510 i 550 znajduje się główny cykl rysujący. Mapa jest postaci: $x_{n+1} = -Bx_{n-1} + 2Cx_n + 2F(x_n)$, gdzie $n = 1, 2, \dots$ numeruje kolejne iteracje, natomiast współczynniki mapy zdefiniowano w liniach od numeru 80 do 110, podczas gdy funkcję F zdefiniowano w kolejnej linii o numerze 120. Proszę zwrócić uwagę na (wygodniejsze dla programu) zastosowane oznaczenia: $x_{n-1} \equiv u$ - współrzędna wcześniejsza, $x_n \equiv q$ - współrzędna aktualna, $x_{n+1} \equiv x$ - współrzędna późniejsza. Pomiędzy liniami o numerach 300 a 480 rysowany jest układ, na którego osi poziomej odłożono współrzędną x_n , a na pionowej x_{n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$. W ten sposób tworzona jest potrzebna mapa, czyli przekształcenie $(x_{n-1}, x_n) \rightarrow (x_n, x_{n+1})$, $n = 1, 2, \dots$. Warto zauważyć, że za pomocą zamieszczonego programu można uzyskać nie tylko dyssypatywną mapę Hénona przyjmując $B = -b$ (tutaj b jest dodatnią liczbą rzeczywistą; aby otrzymać dziwny atraktor, należy podstawić po prostu $b = 0,3$) oraz $A = 1,4$ (wielkość parametru charakterystyczna dla dziwnego atraktora), $C = 0$, $D = 1/2$, ale także inne mapy (trzeba pamiętać wtedy o odpowiedniej definicji zmiennej tekstowej $a\$$ w linii 60), np. konserwatywną mapę Hénona ($A = 2$, $B = 1$, C - dowolne, $D = 0$) lub mapę logistyczną ($A = a$, $B = 0$, $C = a/2$, $D = 0$, gdzie a jest liczbą rzeczywistą). Poeksperymentujcie zamieszczonym programem, np. startując z różnych współrzędnych początkowych u oraz q , aby zaobserwować **przyciągający charakter atraktora**. A może spróbujecie, zmieniając odpowiednio czynnik s skalujący osie układu współrzędnych (zdefiniowany w linii 260), powiększyć dowolny fragment atraktora i zaobserwować **własność lokalnego samopodobieństwa**.

Zamieszczony program komputerowy o nazwie MAPOWANIE 3/2-D wykonuje projekcję trójwymiarowych obiektów na płaszczyznę. Za pomocą tego programu można narysować (rys. 3) i badać **atraktor Lorenza**. Jest on atraktorem rozwiązania układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu postaci

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= e \cdot (x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1 \cdot (\mu - x_3) - x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 \cdot x_2 - f \cdot x_3, \end{aligned}$$

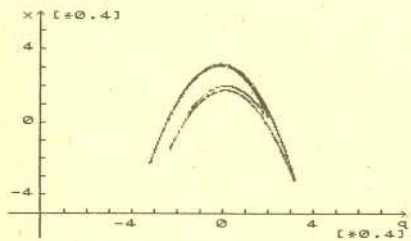
dla następujących wartości parametrów: $e = 10$, $\mu = 28$, $f = 8/3$.

```

** ** ** **
** ** ** POLSKI ** ** **
** ** ** **
** ** ** **
** ** ** **
** ** ** **
** ** **   MAPA HENONA   ** ** **
** ** **   u=0          q=0.3   ** ** **
** ** **   s=1          a=1.4   ** ** **
** ** **   b=0.3       c=0       ** ** **
** ** **   d=0.5       e=10      ** ** **
** ** **   f=8/3       g=1       ** ** **
** ** **   h=0         i=0       ** ** **
** ** **   j=0         k=0       ** ** **
** ** **   l=0         m=0       ** ** **
** ** **   n=0         o=0       ** ** **
** ** **   p=0         r=0       ** ** **
** ** **   s=1         t=0       ** ** **
** ** **   u=0         v=0       ** ** **
** ** **   w=0         x=0       ** ** **
** ** **   y=0         z=0       ** ** **
** ** **   AA=0        BB=0       ** ** **
** ** **   CC=0        DD=0       ** ** **
** ** **   EE=0        FF=0       ** ** **
** ** **   GG=0        HH=0       ** ** **
** ** **   II=0        JJ=0       ** ** **
** ** **   LL=0        MM=0       ** ** **
** ** **   NN=0        OO=0       ** ** **
** ** **   PP=0        QQ=0       ** ** **
** ** **   RR=0        SS=0       ** ** **
** ** **   TT=0        UU=0       ** ** **
** ** **   VV=0        WW=0       ** ** **
** ** **   XX=0        YY=0       ** ** **
** ** **   ZZ=0        AA=0       ** ** **
** ** **   BB=0        CC=0       ** ** **
** ** **   DD=0        EE=0       ** ** **
** ** **   FF=0        GG=0       ** ** **
** ** **   HH=0        II=0       ** ** **
** ** **   JJ=0        KK=0       ** ** **
** ** **   LL=0        MM=0       ** ** **
** ** **   NN=0        OO=0       ** ** **
** ** **   PP=0        QQ=0       ** ** **
** ** **   RR=0        SS=0       ** ** **
** ** **   TT=0        UU=0       ** ** **
** ** **   VV=0        WW=0       ** ** **
** ** **   XX=0        YY=0       ** ** **
** ** **   ZZ=0        AA=0       ** ** *

```

MAPA HENONA
u=0
q=0.3



Rys. 2

Ten układ równań program rozwiązuje tzw. ulepszoną metodą Eulera. W zamieszczonym programie schemat różnicowy tej metody zajmuje zaledwie sześć prostych linii (od numeru 600 do 650).

