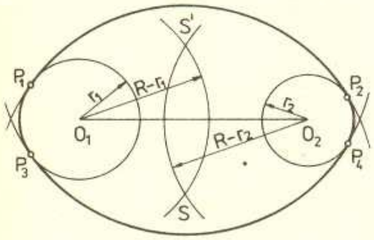
Kilka uwag o kreśleniu owalu

Dr inż. Janusz KONDRASIUK

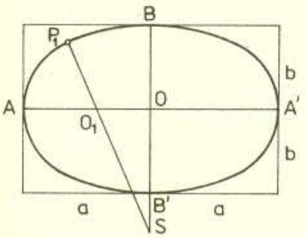
W technice często użyteczne są elementy mające kształt owalu, czyli gładkiej wypukłej krzywej zamkniętej. Takim owalem jest, oczywiście, okrąg. Jest też nim elipsa, ale wykonanie detalu o tym kształcie jest, w praktyce produkcyjnej, kłopotliwe. Dlatego też owale stosowane w technice są zazwyczaj gładko połączonymi łukami okręgów. Powstaje pytanie, jak je kreślić. Uściślijmy jeszcze pojęcie gładkości: dwa łuki łączą się gładko we wspólnym punkcie, jeśli mają w nim wspólną styczną.

Zadanie. Dane są dwa okręgi o środkach O_1 i O_2 i promieniach, odpowiednio, r_1 i r_2. Znaleźć łuki okręgów o promieniu R łączące się gładko z tymi okręgami.



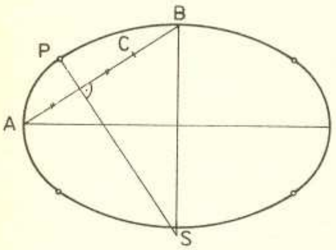
Rozwiązanie. Z punktu O_1 zakreślamy okrąg o promieniu $R - r_1$, a z punktu O_2 – o promieniu $R - r_2$. Punkty S i S' przecięcia tych okręgów są środkami szukanych łuków. Gładkość połączenia zapewnia fakt, że proste O_1S, O_1S', O_2S i O_2S' zawierają promienie stykających się okręgów. Czytelnik zechce sam ustalić, dla jakich parametrów O_1, O_2, r_1, r_2 i R (w istocie są cztery parametry, bo nie jest istotne położenie O_1 i O_2, lecz tylko ich odległość) zadanie ma rozwiązanie, z którego powstaje owal.

Często, szczególnie gdy owal ma zastępować elipsę, żądamy, by miał on dwie osie symetrii. Na parametry też nakładamy dodatkowe warunki – zazwyczaj chcemy, by owal był wpisany w dany prostokąt. Jak łatwo się przekonać, nie zapewnia to jednoznaczności. Oto trzy przykłady konstrukcji z dodatkowo przyjętymi warunkami dla owalu wpisanego w prostokąt o bokach $2a$ i $2b$ $(a > b)$.



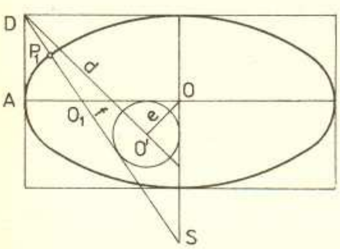
Konstrukcja 1. Oznaczmy przez O środek prostokąta. Na prostej zawierającej dłuższą oś symetrii prostokąta odkładamy od O odcinki o długości $\left(1 + \frac{1}{n}\right)(a - b)$, a na zawierającej krótszą – odcinki o długości $\left(\frac{n}{2} + 1\right)(a - b)$. Końce tych odcinków będą środkami łuków stycznych, odpowiednio do krótszych i dłuższych boków prostokąta.

Czytelnik zechce sprawdzić (przez porównanie z Zadaniem), że otrzymamy owal, oraz odgadnąć znaczenie parametru n.



Konstrukcja 2. Oznaczmy środki kolejnych boków prostokąta przez A i B. Na odcinku AB wybieramy taki punkt C, że $BC = a - b$. Symetralna odcinka AC wyznacza na prostych zawierających osie symetrii prostokąta dwa spośród czterech szukanych środków okręgów, co pozwala dokończyć rysunek.

I znów prosimy Czytelnika o sprawdzenie poprawności konstrukcji. Nie ma w niej już niczego dowolnego (gdy prostokąt jest dany). Dołączony przez nas warunek to żądanie, by łuki o większym promieniu miały rozwartość $2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ (proszę sprawdzić).



Konstrukcja 3. Z dowolnego wierzchołka D prostokąta i z jego środka prowadzimy proste d i e tworzące z bokami prostokąta kąt 45°. Oznaczmy punkt ich przecięcia przez O'. Z punktu O' kreślimy okrąg pomocniczy, styczny do obu osi symetrii prostokąta. Z wierzchołka D prowadzimy styczną f do okręgu pomocniczego, przecinającą osie w dwóch spośród czterech szukanych środków okręgów (i kończymy konstrukcję).

To też trzeba sprawdzić, jak też odgadnąć sens przyjętego tym razem ograniczenia.

I jeszcze jedna uwaga: owal nazywamy foremnym, gdy łuk o większym promieniu, spośród łuków okręgów składających się na owal, ma rozwartość 60°. Można taki owal umieścić w dowolnym prostokącie, jeśli tylko w Konstrukcji 1 przyjmiemy $n = \sqrt{3} + 1$. W Konstrukcjach 2 i 3 (gdzie nie mamy żadnej swobody) owal foremny powstaje, odpowiednio, gdy $a = \sqrt{3}b$ i $a = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}b$.