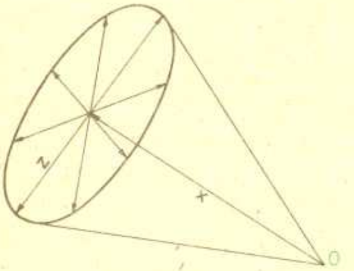
Rozwiązanie zadania M 539.
Na ogół taki obrót nie istnieje. Oto przykład: weźmy wektory $x + z_1$, $x + z_2, \dots, x + z_8$, gdzie $|x| = 1$, $|z_i| = 1$, ponadto końce wektorów z_i są rozmieszczone na okręgu oraz $x \perp z_i$.



Kąty między $x + z_i$ i $x + z_j$ nie przekraczają $90°$ – wystarczy zauważyć, że iloczyn skalarny $\langle x + z_i, x + z_j \rangle = |x|^2 + \langle z_i, z_j \rangle \geq 0$.
Przypuśćmy teraz, że wszystkie punkty $x + z_i$ leżą w dodatnim oktancie.
Rozpatrzmy dwa wektory z naszego zbioru: $x + z$ i $x - z$ (opuszczamy dla wygody wskaźniki przy z); niech $x = (x_1, x_2, x_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$. Ma być $x_1 + z_1 \geq 0$, $x_1 - z_1 \geq 0$, skąd $|z_1| \leq x_1$.
Podobnie $|z_2| \leq x_2$, $|z_3| \leq x_3$.
Ale jednocześnie $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, czyli musi być $|z_i| = x_i$, $i = 1, 2, 3$, i to dla każdego $z \in \{z_1, \dots, z_8\}$. Rozpatrzmy teraz dwa prostopadłe wektory $u, v \in \{z_1, \dots, z_8\}$.
W takim razie dla każdego układu znaków $\frac{\pm u \pm v}{\sqrt{2}} \in \{z_1, \dots, z_8\}$.
Mielibyśmy zatem, wybierając i takie, że $x_i \neq 0$, $\frac{1}{\sqrt{2}}|\pm u_i \pm v_i| = x_i$ dla każdego układu znaków, a skądinąd $|u_i| = |v_i| = x_i$ – sprzeczność.
Uwaga. Zadanie pochodzi od dr. Adama Jakubowskiego (UMK). Autor rozwiązania (UW) pragnie zachować incognito.

Patrz w niebo

Wielki Obłok Magellana zasłużył się ostatnio astronomii nie tylko tym, że pojawiła się w nim supernowa. Tak się złożyło, że przyczynił się on – chyba już definitywnie – do pogrzebania pojęcia supermasywnych gwiazd. Otóż w centrum obłoku zjonizowanego wodoru znanego pod nazwą 30 *Doradus* lub NGC 2070 lub po prostu Tarantula znajduje się gwiazdopodobny obiekt (o symbolicznej nazwie R136a) o średnicy nie przekraczającej 10 lat świetlnych, a emitujący tyle energii co przynajmniej 50 mln Słońc. Byłby więc to obiekt mocno osobliwy wymagający wytłumaczenia, w jaki sposób tak wielka moc może być produkowana w tak małej objętości. Możliwości były dwie: albo supermasywna gwiazda o masie rzędu 1000 Słońc, albo supergęsta gromada skądinąd normalnych gwiazd. Rozstrzygnięcie mogłyby przynieść obserwacje wykonane z rozdzielczością lepszą niż 1".

I takie obserwacje zostały wykonane. W 1985 r. grupa badaczy pod kierunkiem Anthony'ego Moffata z Uniwersytetu w Montrealu stwierdziła, że R136a jest bardzo zwartą grupą co najmniej ośmiu bardzo gorących gwiazd o jasności absolutnej nie większej niż -8 mag. Zostało to zresztą potwierdzone przez inny zespół badaczy z RFN.

Moffat i jego współpracownicy uzyskali podobny rezultat odnośnie innej mgławicy NGC 3603 w Kilu, której gwiazdopodobny centralny obiekt ma katalogową nazwę HD 97950. Okazał się on również gromadą gwiazd, nawet jeszcze bardziej zwartą niż w Tarantuli.

Ale to jeszcze nie koniec „zasług" Wielkiego Obłoku Magellana. Mianowicie w 1988 roku M. Heydari-Malayeri z ESO doniósł, że znajdujący się w tym Obłoku obiekt Sanduleak -66°41, uważany dotychczas za jedną z najmasywniejszych i najjaśniejszych gwiazd, jest w istocie znowu minigromadą co najmniej pięciu ciasno upakowanych gorących gwiazd.

Analogiczny wynik uzyskano dla innej superjasnej gwiazdy – η *Carinae*. Okazała się minigromadą czterech gwiazd, między którymi odległości nie przekraczają 0",03. A obiektów tego rodzaju jest więcej. W rezultacie są podstawy przypuszczać, że górna granica masy gwiazd jest rzędu 200 Słońc, a może mniej, ale w każdym razie nie tysiące! Fakt ten może mieć poważne konsekwencje nawet kosmologiczne. Chodzi o to, że skoro tak zwane dotychczas najjaśniejsze gwiazdy widziane w licznych galaktykach i traktowane jako wskaźniki odległości są w rzeczywistości gromadami, to znaczy, że wyznaczone w ten sposób odległości tych galaktyk były zbyt małe. Wszechświat może więc jest większy, niż nam się dotychczas zdawało.

dr Tomasz KWAST

Jednym cięciem podzielić kwadrat na dwa przystające trójkąty

Doc. dr Lesław W. SZCZERBA

Przedszkolak rozwiąże natychmiast tytułowe zadanie: złapie nożyczki, przetnie wzdłuż przekątnej i gotowe. Jedyna trudność, jaka tu może się pojawić, to taka, że wnikliwe (co jest eleganckim odpowiednikiem precyzyjniejszego, lecz grubiańskiego „wścibskie") dziecko nie zrozumie słowa „przystaje". Nasz Wścib..., przepraszam, Wnikliwy Przedszkolak może być tym słowem w zadaniu zaskoczony: przyzwyczaił się, że negocjatorzy przystają (lub nie przystają) na propozycje strony przeciwnej, ale (jak pragnę nie leżakować po obiadku) na jakie propozycje mają przystawać trójkąty z zadania? Ponieważ odpowiedź „Nie garb się" jest, co prawda, poprawna, ale nie na temat, należy wytłumaczyć Wnikliwemu, że w tym przypadku idzie nie o „przystawanie na" lecz o „przystawanie do". Jeden trójkąt przystaje do drugiego, jeśli można przystawić jeden do drugiego tak, by się pokryły. Niektórzy przy sprawdzaniu pokrywania mrużą jedno oko. Nie jest to jednak konieczne i można się obejść bez mrużenia. Nasz Wnikliwy złapie trójkąty, przystawi, zmruży jedno oko i ... rzeczywiście, przystają!

Rozwiązanie zadania F 266.
Moment dipolowy atomu argonu w zewnętrznym polu o natężeniu E możemy zapisać w postaci

$$p = Zxe = \varepsilon_0 \alpha E,$$

gdzie x – przesunięcie powłoki elektronowej, Z – liczba elektronów w atomie, α – polaryzowalność atomu:

$$\alpha = \frac{Zxe}{\varepsilon_0 E}.$$

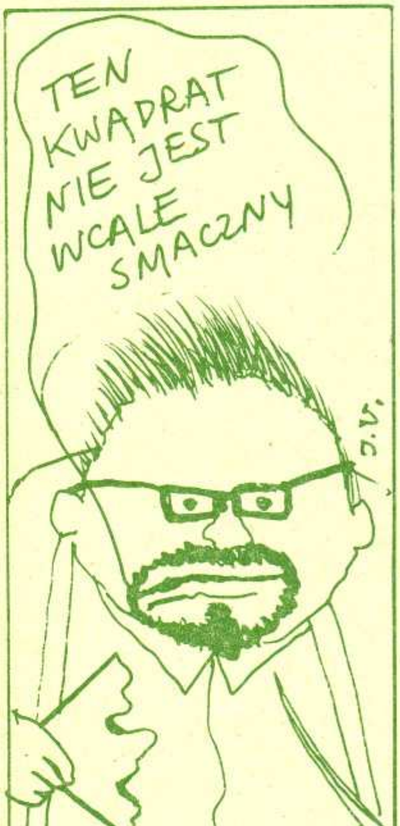
Przenikalność dielektryczna ε jest związana z polaryzowalnością α relacją

$$\varepsilon = 1 + n_0 \alpha,$$

gdzie $n_0 = 2.7 \times 10^{19}\ \mathrm{cm}^{-3}$ jest koncentracją atomów w warunkach normalnych (liczba Loschmidta). Otrzymujemy stąd

$$x = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E/(n_0 Z e) \cong 2 \times 10^{-16}\ \mathrm{cm}.$$

Ta deformacja jest znikomo mała w porównaniu z rozmiarami atomu, które są rzędu 10^{-8} cm.



Takie podejście nie tylko do geometrii, ale do całej matematyki pochodzi od S. Leśniewskiego (*Podstawy ogólnej teoryi mnogości*, I, Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie, Mat.–Przyrod. 2, Moskwa 1916) i nosi nazwę *mereologii*. Geometrię w mereologii próbował zbudować A. Tarski (*Les fondaments de la geometrie des corps*, Księga Pamiątkowa Pierwszego Polskiego Zjazdu Matematycznego, Kraków 1929). Rezultatem pracy Tarskiego jest jednak tylko dowód możliwości budowy geometrii w oparciu o mereologię.

Wyrafinowany matematyk nie będzie miał trudności z pojęciem przystawania. On wie, że trójkątów nie bierze się w rękę i nie przystawia, lecz przekształca przez izometrię. Może się natomiast zastanowić nad znaczeniem słowa „podzielić", ale sam szybko znajdzie wyjaśnienie. Należy podać dwa trójkąty rozłączne, które w sumie (mnogościowej) dadzą kwadrat.

Ponieważ podział ma być dokonany jednym cięciem, łatwo zauważyć, że musi to być cięcie wzdłuż przekątnej, a więc wymaganą izometrią będzie albo symetria osiowa względem tej przekątnej, albo symetria środkowa względem środka kwadratu. Przy symetrii środkowej okazuje się, że aby trójkąty były przystające, środek kwadratu musi jednocześnie należeć (lub jednocześnie nie należeć) do obu trójkątów, ale wówczas trójkąty te nie będą podziałem kwadratu. Przy rozważaniu symetrii osiowej sprawa jest jeszcze gorsza: kłopoty są z całą przekątną. Wniosek może być tylko jeden: tytułowe zadanie nie da się rozwiązać, a kwadrat – podzielić na dwa przystające trójkąty.

Taki wniosek jest całkowicie poprawny i zupełnie niezadowalający. Cóż bowiem za sztuki magiczne wyczyniał nasz Wnikliwy Przedszkolak z nożyczkami, że mu wyszło?

Można obarczyć winą Przedszkolaka. Udało mu się, a innym, nawet bardziej predestynowanym do sukcesu, nie. To niesprawiedliwe i niesłuszne. W tej sytuacji należy zakazać posługiwania się nożyczkami w obecności kwadratów i utworzyć specjalny urząd do wprowadzania zakazu w życie. Jednym z pierwszych obowiązków urzędu będzie sporządzenie listy tych, których zakaz nie obowiązuje. Obowiązywać musi wszystkich przedszkolaków bez wyjątku. Wyjątek można natomiast zrobić dla Wyrafinowanych. Oni i tak wiedzą, że podziału zrobić się nie da.

Inną możliwością jest doszukiwanie się czegoś niedobrego w rozumowaniu Wyrafinowanego. Trudności są z pojedynczym punktem. Punkt to coś tak małego, że może by go tak zaniedbać? Nie popieramy strusiej polityki. Nie można zaniedbywać czegoś, co realnie istnieje. Ale czy punkt istnieje realnie? Czy rzeczywiście figury składają się z punktów? Pogląd, że się składają, ma za sobą długą tradycję i jest poparty przez poglądy plejady wybitnych autorytetów, poczynając, powiedzmy, od Euklidesa. Nic jednak nie stoi na przeszkodzie przyjęciu postawy rewolucyjnej i ogłoszeniu, że figura nie składa się z punktów.

Intuicje, jakie wiążę z pojęciem figury, są następujące: na kartce papieru rysuję linię zamkniętą nie przecinającą się. Linia ta rozcina płaszczyznę na dwie części. Jedna z nich jest ograniczona, i to właśnie jest figura, przy czym linia podziału do niej nie należy. Zarzuty przeciwko takiemu stawianiu sprawy są dwa: Dlaczego figury muszą być ograniczone? Po drugie w tej definicji *implicite* używa się pojęcia punktu! Odpowiedź na pierwszy zarzut jest łatwa. Do tytułowego zadania wystarczą figury ograniczone. Można by nawet wprowadzić taki termin, ale oszczędniej jest przymiotnik „ograniczony" opuszczać. Skoro o nieograniczonych mamy nie mówić, to co za różnica? W istocie powinniśmy jeszcze opatrzyć termin „figura" przymiotnikiem „płaska". Odcinek nie jest figurą i o to wielu mogłoby mieć pretensję. Trudniej jest z drugim zarzutem. Byłby on nie do odparcia, gdybym powyższy opis chciał uznać za formalną definicję figury. W teoriach formalnych definiowanie *ignotum per ignotum* (nieznanego przez nieznane) jest uważane za błąd. W rozważaniach intuicyjnych możemy sobie na to pozwolić, zwłaszcza że nie mamy aksjomatyki, która mogłaby służyć jako definicja nie opierająca się na pojęciach wcześniej zdefiniowanych.

Mamy zatem pojęcie figury i Czytelnicy chyba się ze mną zgodzą, że można sobie figurę wyobrazić, nie zastanawiając się w ogóle nad punktami. Potrzebne mi jeszcze będzie pojęcie części figury. Pseudodefinicja (z użyciem punktów) jest prosta: jedna figura jest częścią drugiej wówczas, gdy jest w niej zawarta. Dlaczego zatem nie posługiwać się terminem zawierania? Tylko dlatego, że sugeruje on jakieś elementy figury, a więc punkty, których tak bardzo chcemy uniknąć. Założenie, że punkt (dla zakamieniałych cantorystów: zbiór jednopunktowy) nie jest figurą, ma poważne konsekwencje. Nie można rozróżnić figury z brzegiem i figury bez brzegu. Mamy po prostu kwadraty i trójkąty, a nie kwadraty lub trójkąty z brzegiem lub bez brzegu. Wymaga to modyfikacji pewnych pojęć. Przyzwyczajeni jesteśmy mówić, że figury przecinają się, gdy mają wspólny punkt. Teraz o punktach mówić nie wolno, zatem figury przecinają się, jeśli mają wspólną figurę. Oznacza to, że figury nie przecinają się, gdy nie istnieje figura wspólna. Natomiast sumą dwóch figur A i B jest najmniejsza figura, której A i B są częściami.

Przy takim rozumieniu terminów otrzymujemy upragnioną zgodność naiwnego rozwiązania zadania przez Przedszkolaka z naukową analizą Wyrafinowanego. Uff...