Bez pochodnych

Dr Michał KRYCH

W rachunku różniczkowym dowodzi się, że jeśli funkcja f ma pochodne dowolnego rzędu i to, na przykład, wspólnie ograniczone, to można ją rozwinąć w szereg Taylora

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

I na odwrót, jeśli $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(x - x_0)^n$, to funkcja f jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna i $f^{(n)}(x_0) = a_n$. Na przykład dla funkcji sinus i punktu $x_0 = 0$ mamy

$$(*) \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

A czy można ten ostatni wzór udowodnić bez używania rachunku różniczkowego?

Zauważmy, że jeśli wykażemy, iż dla każdego n i $0 \le x \le \pi/2$ jest prawdziwa nierówność

$$(**) \qquad \sum_{n=0}^{2m-1}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \le \sin x \le \sum_{n=0}^{2m}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

to będzie z tego wynikać $(*)$. Wykażę poniżej, w jaki sposób można uzyskać tę nierówność dla $m = 1$, czyli nierówność

$$x - \frac{x^3}{6} \le \sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} ,$$

korzystając wyłącznie z elementarnych wzorów

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} ,$$

$$\sin x = 3\sin \frac{x}{3} - 4\sin^3 \frac{x}{3} ,$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \text{dla} \quad 0 < x < \pi/2$$

i z teorii ciągów zbieżnych.

Mamy dla $0 < x < \pi/2$

$$\sin x > x\cos x = x(1 - 2\sin^2 x) > x\left(1 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) = x - \frac{1}{2}x^3 .$$

Konstruujemy taki ciąg (a_n), że $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n > \frac{1}{6}$ oraz dla każdej liczby $x \in (0, \pi/2)$ zachodzi nierówność $\sin x > x - a_n x^3$. Dla takiego ciągu mamy

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3} > 3\left(\frac{x}{3} - a_n\left(\frac{x}{3}\right)^3\right) - 4\frac{x^3}{27} = x - x^3\left(\frac{a_n}{9} + \frac{4}{27}\right) .$$

Przyjmując $a_{n+1} = \frac{1}{9}a_n + \frac{4}{27}$ otrzymujemy, iż

$$\sin x > x - a_{n+1}x^3 \quad \text{dla } x \in (0, \pi/2) .$$

Oczywiście, $a_{n+1} = \frac{1}{9}a_n + \frac{4}{27} > \frac{1}{9\cdot 6} + \frac{4}{27} = \frac{1}{6}$. Mamy też $a_{n+1} - \frac{1}{6} = = \frac{1}{9}a_n + \frac{4}{27} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9}\left(a_n - \frac{1}{6}\right)$. A zatem $a_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{9}\right)^n\left(a_0 - \frac{1}{6}\right)$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{6}$.

Wykazaliśmy zatem, że dla $x \in (0, \pi/2)$ zachodzi

$$\sin x \ge \lim_{n\to\infty}(x - a_n x^3) = x - \frac{x^3}{6} .$$

Z powyższej nierówności wynika, iż

$$\sin x = 3\sin\frac{x}{3} - 4\sin^3\frac{x}{3} < 3\frac{x}{3} - 4\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{3}\right)^3\right)^3 =$$

$$= x - \frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{243}x^5 - \frac{x^7}{3^9} + \frac{x^9}{2\cdot 3^{12}} < x - \frac{4}{27}x^3 + \frac{2}{243}x^5 .$$

Podobnie jak poprzednio przyjmijmy $\alpha_0 = \frac{4}{27}$, $\beta_0 = \frac{2}{243}$ i załóżmy, że $\sin x < x - \alpha_n x^3 + \beta_n x^5$ dla $x \in (0, \pi/2)$, gdzie $\alpha_n < \frac{1}{6}$, $0 < \beta_n < \frac{1}{120}$. Otrzymujemy

$$\sin x < 3\left(\frac{x}{3} - \alpha_n\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \beta_n\left(\frac{x}{3}\right)^5\right) - 4\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{x}{3}\right)^3\right)^3 <$$

$$< x - \left(\frac{1}{9}\alpha_n + \frac{4}{27}\right)x^3 + \left(\frac{1}{81}\beta_n + \frac{2}{243}\right)x^5 = x - \alpha_{n+1}x^3 + \beta_{n+1}x^5 ,$$

gdzie określiliśmy: $\alpha_{n+1} = \frac{1}{9}\alpha_n + \frac{4}{27}$, $\beta_{n+1} = \frac{1}{81}\beta_n + \frac{2}{243}$. I znów $\alpha_{n+1} - \frac{1}{6} = = \frac{1}{9}\left(\alpha_n - \frac{1}{6}\right)$ i $\beta_{n+1} - \frac{1}{120} = \frac{1}{81}\left(\beta_n - \frac{1}{120}\right)$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \frac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = \frac{1}{120}$ i wobec tego

$$\sin x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} .$$

Pozostawiam Czytelnikom zbadanie, jak dowodzić nierówności $(**)$ dla następnych m.

Rozwiązanie zadania F 267.
W układzie odniesienia związanym z rakietą na elektrony w umocowanym i ustawionym równolegle do wektora przyspieszenia pręcie działa siła bezwładności ma. W stanie równowagi siła ta jest równoważona siłą eE ze strony pola elektrycznego.
W konsekwencji na końcach przewodnika o długości l powstaje w czasie przyspieszania różnica potencjałów $U = El = mal/e$. A więc przyspieszenie można zmierzyć przez pomiar różnicy potencjałów U. Przy $a = 10g$ i $l = 10$ m otrzymujemy $U \cong 6 \times 10^{-9}$ V. Technika współczesna w zasadzie umożliwia pomiar tak małych napięć. Jednakże warto pamiętać, że najprostszy sposób takiego pomiaru, tj. połączenie końców badanego przewodnika z urządzeniem pomiarowym za pomocą dwóch innych przewodników zawodzi, bowiem na ich końcach też powstaje różnica potencjałów. Zamiast tego można zmierzyć amplitudę prądu płynącego w przewodniku przy cyklicznej zmianie jego orientacji o 180°.