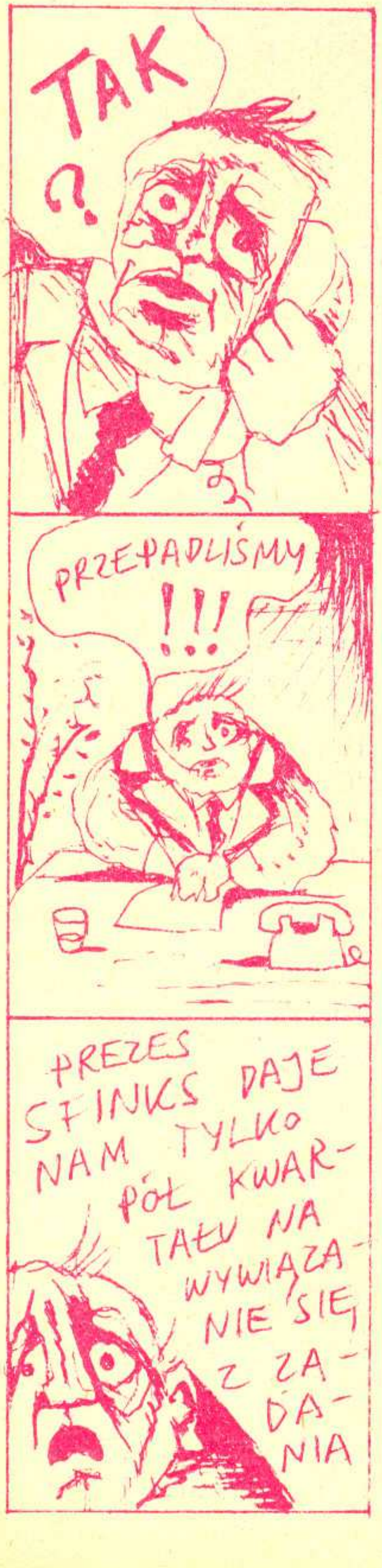
Kącik prac uczniowskich



Sumy współczynników dwumianowych

Jedną z podstawowych własności współczynników rozwinięcia potęgi dwumianu jest równość $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$, która daje prosty wzór na sumę liczb występujących w n–tym wierszu trójkąta Pascala. A jaka będzie suma co drugiej liczby w n–tym wierszu? Okazuje się, że

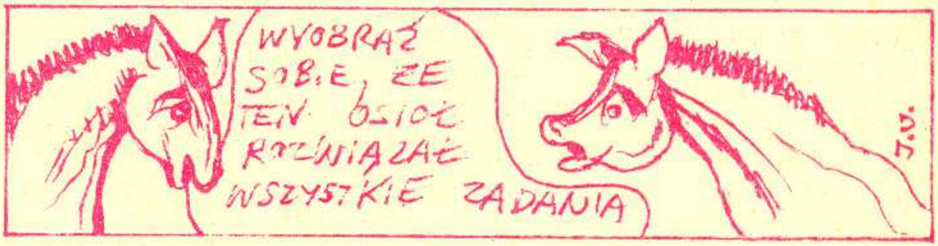
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}=\frac{2^n}{2},$$

czyli sumując co drugą liczbę otrzymamy wynik niezależny od tego, czy rozpoczynamy dodawanie od $\binom{n}{0}$, czy od $\binom{n}{1}$. Dowód powyższych faktów jest prosty: wystarczy przedstawić w postaci sumy liczby $(1+1)^n$ i $(1-1)^n$. A ile wynosi suma co trzeciego wyrazu: $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots$? Czyżby $\frac{2^n}{3}$? Niestety, nie. To musi być liczba całkowita! I oto mamy problem do zbadania: Obliczyć sumę $\binom{n}{l}+\binom{n}{l+k}+\binom{n}{l+2k}+$ $+\binom{n}{l+3k}+\ldots$, gdzie $l<k$. Zagadnienie to wiąże się ściśle z następującym pytaniem: Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po n rzutach monetą liczba orłów będzie podzielna przez k z resztą l? Można też rozważać sumy kwadratów wyrazów trójkąta Pascala. Wiadomo bowiem, że

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

A jeśli wziąć w tej sumie co drugi (lub co k–ty) składnik?

J.W.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 535. Oto przepis na elipsę z poradnika dla majsterkowiczów: owijamy walec papierem i rysujemy cyrklem „okrąg". Po rozprostowaniu papieru otrzymamy elipsę. Czy rzeczywiście?
Rozwiązanie na str. 2

M 536. Ogólnie znany przepis na prostą: zgiąć kartkę papieru. Linia zgięcia jest prosta – dlaczego?
Rozwiązanie na str. 10

M 537. Funkcja ciągła f ma następującą własność: jeśli $x-y=1$, to $f(x)-f(y)=1$. Czy f musi być liniowa?
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 264. Ocenić siłę, jaką należy przyłożyć do krawędzi nadmuchiwanego materaca tak, aby zgiąć go pod kątem 90°. Zakładamy, że materac składa się z jednej części i nie ma poprzecznych szwów oraz jest dobrze napompowany.
Rozwiązanie na str. 3

F 265. Dziecięcy balonik napełniony jest gorącym powietrzem. Przy jakiej temperaturze powietrza w baloniku będzie mógł się on unieść? Temperatura T_0 otoczenia wynosi około 300 K.
Rozwiązanie na str. 4