O funkcjach arytmetycznych i splocie Dirichleta

Dr Jerzy RUTKOWSKI

Jednym z działów teorii liczb jest teoria funkcji arytmetycznych, tj. funkcji o wartościach liczbowych określonych na zbiorze N liczb naturalnych. A oto kilka przykładów funkcji arytmetycznych.

Przykład 1. Suma dzielników – σ.
Dla każdego $n \in \mathrm{N}$ określamy $\sigma(n)$ jako sumę dzielników naturalnych liczby n. Mamy $\sigma(1) = 1$. Jeśli $n > 1$, to możemy n przedstawić w postaci iloczynu potęg różnych liczb pierwszych $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$, gdzie $r, k_1, \ldots, k_r \in \mathrm{N}$ (jest to tzw. rozkład kanoniczny liczby n). Rozpatrzmy następujący iloczyn sum

$$(\star) \qquad (1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \ldots + p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot (1 + p_r + p_r^2 + \ldots + p_r^{k_r}).$$

Po wykonaniu mnożeń otrzymamy sumę $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_r + 1)$ różnych iloczynów, przy czym każdy z tych iloczynów jest dzielnikiem liczby n i na odwrót – każdy dzielnik liczby n jest jednym z tych iloczynów. Zatem wyrażenie $(\star)$ jest sumą wszystkich dzielników naturalnych liczby n. Korzystając ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy, że

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}.$$

Np. dla $n = 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ mamy

$$\sigma(600) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 15 \cdot 4 \cdot 31 = 1860.$$

Przykład 2. Liczba dzielników – τ.
Liczbę dzielników naturalnych liczby n oznaczamy przez $\tau(n)$. Oczywiście, $\tau(1) = 1$. Jeśli $n > 1$ i $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ jest rozkładem kanonicznym liczby n, to z rozważań w przykładzie 1 wynika, że

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_r + 1).$$

Np. mamy $\tau(600) = \tau(2^3 \cdot 3 \cdot 5^2) = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Przykład 3. Funkcja Eulera – φ.
Dla dowolnego $n \in \mathrm{N}$ określamy $\varphi(n)$ jako liczbę takich liczb naturalnych k, że $k \le n$ i $(k, n) = 1$ (tzn. nie mają innych wspólnych dzielników niż 1, czyli są względnie pierwsze). Np. $\varphi(10) = 4$, ponieważ istnieją dokładnie 4 liczby naturalne nie większe od 10 i względnie pierwsze z 10 (są to 1,3,7 i 9). Mamy też $\varphi(1) = 1$. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $k \in \mathrm{N}$, to $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$, ponieważ wśród liczb $1, 2, \ldots, p^k$ co p-ta nie jest względnie pierwsza z p^k. Dowodzi się, że jeśli $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$ jest rozkładem kanonicznym liczby n, to

$$\varphi(n) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \cdot \ldots \cdot (p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}).$$

Przykład 4. Funkcja Möbiusa – μ.
Funkcja ta określona jest wzorem

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n = 1; \\ (-1)^r, & \text{jeśli } n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r, \text{ gdzie } p_1, \ldots, p_r \text{ są różnymi liczbami pierwszymi;} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

W szczególności mamy $\mu(2) = \mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$.

Przykład 5. Funkcja e określona wzorem

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1; \\ 0 & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Przykład 6. Funkcja I, gdzie $I(n) = 1$ dla każdego $n \in \mathrm{N}$.

Przykład 7. Funkcja T, gdzie $T(n) = n$ dla każdego $n \in \mathrm{N}$.

Zwróćmy uwagę, że jeśli f jest którąkolwiek z siedmiu powyższych funkcji arytmetycznych, to $f(1) = 1$ oraz

$$f(p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{k_r})$$

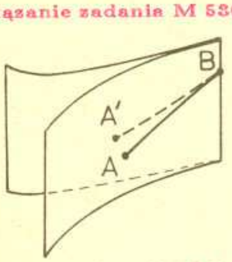
dla dowolnych $r, k_1, \ldots, k_r \in \mathrm{N}$ i dowolnych liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_r$. Funkcję arytmetyczną o takich własnościach nazywamy multyplikatywną.

Funkcje arytmetyczne można w zwykły sposób dodawać i mnożyć. Mamy np. $(\tau + \sigma)(600) = 24 + 1860 = 1884$, $(\tau \cdot \sigma)(600) = 24 \cdot 1860 = 44640$.

Jednakże w zbiorze funkcji arytmetycznych można określić jeszcze inne działanie, które jest niezmiernie użyteczne w teorii tych funkcji. Działanie to, zwane splotem Dirichleta, oznaczamy symbolem $*$ i określamy je następująco: dla dowolnych funkcji arytmetycznych f i g oraz dowolnego $n \in \mathrm{N}$

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Rozwiązanie zadania M 536.



Rozpatrzmy punkty A i A', które pokrywają się po zgięciu kartki oraz dowolny punkt B na zgięciu. Widać, że linia zgięcia składa się z punktów równo odległych od A i A'; jest zatem prostą.

Symbol $\sum_{d|n}$ czytamy: „suma po d dzielących n", a jego znaczenie niech wyjaśnią przykłady. Aby obliczyć np. $(\varphi * \tau)(21)$, znajdujemy wpierw wszystkie dzielniki liczby 21, czyli 1,3,7 i 21. Następnie obliczamy

$$(\varphi * \tau)(21) = \sum_{d|21} \varphi(d)\, \tau\left(\frac{21}{d}\right) = \varphi(1)\tau(21) + \varphi(3)\tau(7) + \varphi(7)\tau(3) + \varphi(21)\tau(1) =$$

$$= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 12 \cdot 1 = 32\,.$$

Dla dowolnego $n \in \mathrm{N}$ mamy

$$(I * I)(n) = \sum_{d|n} 1 = \tau(n)$$

oraz

$$(T * I)(n) = \sum_{d|n} d = \sigma(n)\,.$$

Wykażemy, że $\varphi * I = T$, czyli że dla dowolnego $n \in \mathrm{N}$ zachodzi równość $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

Rozpatrzmy n ułamków: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$. Doprowadzając każdy z nich do postaci nieskracalnej otrzymamy nowy układ n ułamków o mianownikach będących dzielnikami n, przy czym dla każdego d dzielącego n dokładnie $\varphi(d)$ ułamków o mianowniku d występuje w tym nowym układzie. Stąd nasza równość.

Udowodnimy jeszcze, że $\mu * I = e$. Jeśli $n = 1$, to $(\mu * I)(1) = \mu(1)I(1) = 1 = e(1)$. Niech teraz n będzie liczbą naturalną większą od 1 o rozkładzie kanonicznym $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$. Każdy dzielnik d liczby n jest postaci $p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{m_r}$, gdzie $0 \le m_i \le k_i$ dla $i = 1, \ldots, r$. Jeśli dla pewnego i jest $m_i > 1$, to wtedy $\mu(d) = 0$. Wobec tego

$$(\mu * I)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \cdot \ldots \cdot p_r} \mu(d) = \big(1 + \mu(p_1)\big)\big(1 + \mu(p_2)\big) \cdot \ldots \cdot \big(1 + \mu(p_r)\big) =$$

$$= 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0\,.$$

Zatem istotnie $\mu * I = e$.

Funkcja e zachowuje się całkiem ciekawie. Dla dowolnej funkcji arytmetycznej f i dowolnego $n \in \mathrm{N}$ otrzymujemy bowiem, że

$$(f * e)(n) = \sum_{d|n} f(d)\, e\left(\frac{n}{d}\right) = f(n)\,,$$

ponieważ dla $d < n$ mamy $e(n/d) = 0$. Zatem $f * e = f$. Czytelnik może sprawdzić, że również $e * f = f$ dla dowolnej funkcji f.

Udowodniliśmy więc następujące równości splotowe:

$$I * I = \tau, \quad T * I = \sigma, \quad \varphi * I = T, \quad \mu * I = e \quad \text{i} \quad f * e = f\,.$$

Równości takie są ciekawe same w sobie, ale na tym ich rola się nie kończy. Ich znaczenie ilustruje następujące twierdzenie:
Jeśli w równości $f * g = h$ którekolwiek dwie funkcje są multyplikatywne, to i trzecia jest multyplikatywna.

Z twierdzenia tego natychmiast wynika, że np. funkcja Eulera jest multyplikatywna, bowiem $\varphi * I = T$ i funkcje I oraz T są w sposób oczywisty multyplikatywne.

Działanie $*$ ma szereg pożądanych własności. Jest ono przemienne, łączne i rozdzielne względem zwykłego dodawania funkcji. Ponadto, jak to już wykazaliśmy, funkcja e zachowuje się tak jak liczba 1 przy mnożeniu liczb.

Wykorzystanie tych algebraicznych własności splotu Dirichleta zilustrujemy dowodząc w sposób czysto algebraiczny, że jeśli dla dowolnego $n \in \mathrm{N}$ zachodzi równość $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, to dla każdego n jest też $f(n) = \sum_{d|n} F(d)\, \mu\left(\frac{n}{d}\right)$. Mamy

$$F = f * I \implies F * \mu = (f * I) * \mu \iff F * \mu = f * (I * \mu) \iff$$

$$\iff F * \mu = f * e \iff F * \mu = f \iff f = F * \mu\,.$$

Dowód został zakończony.

Niech Czytelnik, wzorując się na nim, spróbuje wykazać twierdzenie odwrotne do dopiero co udowodnionego.

Wyprowadzimy jeszcze równość splotową $\varphi * \tau = \sigma$ wiążącą ważne funkcje φ, τ i σ. Mamy

$$\varphi * \tau = \varphi * (I * I) = (\varphi * I) * I = T * I = \sigma\,.$$

Na zakończenie ćwiczenie dla Czytelnika: udowodnić, że jeśli $f \neq 0$ i $g \neq 0$, to również $f * g \neq 0$ (symbol „0" oznacza tu funkcję zerową).

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

MROŻONE ATOMY

Czy atomy można mrozić? Okazuje się, że w pewnym sensie tak. Co ciekawe, rolę lodówki pełni wiązka światła laserowego. Już pod koniec lat siedemdziesiątych stwierdzono, że podobnie jak kulka ping-pongowa wrzucona do pudełka traci pęd i energię kinetyczną przez zderzenia ze ściankami, tak odpowiednio dobrane światło lasera może pełnić rolę "ściany" i chłodzić atomy. Skupienie wiązek światła z kilku laserów ustawionych z różnych stron jest więc w stanie stworzyć takie "pudełko" (nazywane w tym przypadku pułapką), w którym uwięzione atomy można chłodzić. Zmiana pędu atomu po absorpcji fotonu jest, oczywiście, niewielka i nie może przekroczyć h/λ, gdzie h jest stałą Plancka a λ długością fali światła lasera. Na przykład atomy sodu (używane w większości eksperymentów) mają w temperaturze pokojowej prędkość około 1000 m/s. Przy absorpcji żółtego fotonu prędkość ta maleje o 3 cm/s. Oznacza to, że dopiero po zaabsorbowaniu i wyemitowaniu ponad trzydziestu tysięcy fotonów temperatura atomu sodu może obniżyć się do rejonu zera bezwzględnego. Jeżeli odpowiednio dobierzemy energię fotonów ($h\nu$) tworzących pułapkę (ze względu na efekt Dopplera energia ta musi być minimalnie mniejsza niż różnica energii stanów elektronowych w atomie), to atom poruszający się w stronę danego lasera będzie przez niego hamowany. W ten sposób można w niewielkiej objętości (rzędu $10^{-4}\,\mathrm{cm}^3$) utrzymywać przez minuty ochłodzone atomy. Początkowo tę technikę zastosowano do jonów, później udało się schładzać atomy. W jednym z ostatnich eksperymentów grupa fizyków z National Bureau of Standards (stan Maryland, USA), przy zastosowaniu sześciu skupionych w jednym punkcie wiązek laserowych, zdołała ochłodzić gaz złożony z atomów sodu do rekordowej temperatury **0,000043 K**, czyli **43 μK**. Tak schłodzone atomy zachowują się jak bardzo gęsta ciecz, stąd pułapkowane atomy są czasem nazywane "optyczną melasą". Szalenie zabawny jest fakt, iż teoretycznie przewidywany limit dla tej metody chłodzenia wynosił około 240 μK. W związku z tymi przewidywaniami grupa z Bell Laboratories (stan New Jersey, USA), która przed kilku laty uzyskała dokładnie wartość 240 μK, była przekonana, że osiągnęła już granicę możliwości. Tymczasem okazało się, że przesunięcie częstotliwości laserów o 20 MHz poniżej częstotliwości rezonansowej (w porównaniu z 5 MHz stosowanymi przez grupę z Bell Laboratories) dało znakomite rezultaty. Teoretycy muszą więc na nowo wziąć się do pracy, zwłaszcza że ostatnie rezultaty grupy z Maryland zdają się wskazywać na możliwość osiągnięcia jeszcze niższych temperatur w laserowych pułapkach.