Losowanie ze wspomaganiem

Prof. dr Bolesław KOPOCIŃSKI

Podczas jednej z organizowanych w Polsce konferencji z teorii prawdopodobieństwa pojawiło się interesujące praktycznie zadanie wylosowania spośród uczestników konferencji ekipy na wycieczkę w ten wszakże sposób, żeby pewien Dostojny Gość znalazł się w ekipie na pewno. Wspomaganie bogini losu Tyche w czasie pracy budzi zawsze szczególne emocje. Tak było i w tym przypadku, bowiem część osób godziła się uprzejmie przyznać miejsce Dostojnemu, reszta zaś opowiadała się przeciwko uszczupleniu swoich szans.

Zadanie polegało na zaproponowaniu procedury losowania, która zadowoliłaby wszystkich. Dodać należy, że liczba miejsc w ekipie była większa od liczby osób żądających pełni swoich szans. Jak powiedzieliśmy, Dostojny miał wejść do ekipy z prawdopodobieństwem jeden. Pozostaje pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo wejścia do ekipy dla pozostałych osób.

Przyjmijmy, że w zadaniu uczestniczy $n = k + l + 1$ osób: k czarnych, żądających pełni swoich szans, l białych, sprzyjających Dostojnemu i on sam. Do ekipy wchodzi m osób, z warunków zadania wynika, że $m > k$.

Naturalna wydaje się następująca procedura. Bierzemy urnę, w której jest n losów: m pełnych i $n - m$ pustych, z której każdy ciągnie swój los. Jeśli Dostojny wyciągnie los pełny, to postępowanie kończy się; w przeciwnym razie biali, dysponujący pełnymi losami, losują spośród siebie jednego, który ustąpi miejsca Dostojnemu.

W rezultacie każdy czarny ma prawdopodobieństwo m/n wejścia do ekipy, dokładnie tyle, ile może żądać. Dostojny otrzyma los pełny, bowiem $m > k$. Nieznane prawdopodobieństwo znalezienia się białego w ekipie oznaczymy przez p. Aby wyznaczyć p, ponumerujemy wszystkich liczbami od 1 do n biorąc najpierw czarnych, potem białych i na końcu Dostojnego. Zdefiniujmy zmienne losowe X_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, przyjmując $X_j = 1$, jeśli j–ta osoba wchodzi do ekipy i $X_j = 0$ w przeciwnym razie. Mamy

$$P(X_j = 1) = \begin{cases} m/n & \text{jeśli } j = 1, 2, \ldots, k, \\ p & \text{jeśli } j = k+1, \ldots, k+l, \\ 1 & \text{jeśli } j = n, \end{cases}$$

a także zachodzi równość

$$m = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

bowiem liczebność ekipy jest z góry dana.

Posłużymy się pojęciem wartości oczekiwanej zmiennej losowej i, jak zwykle, ten operator oznaczymy literą E. Mamy

$$\mathrm{E}\, X_j = P(X_j = 1), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Skorzystamy z tego, że wartość oczekiwana sumy zmiennych losowych jest równa sumie wartości oczekiwanych, oraz że $\mathrm{E}\, m = m$. Zatem

$$m = \mathrm{E}\,(X_1 + \ldots + X_n) = \mathrm{E}\, X_1 + \ldots + \mathrm{E}\, X_n = k\frac{m}{n} + lp + 1.$$

Stąd

$$p = \frac{1}{l}\left(m - 1 - \frac{km}{n}\right).$$

Jakkolwiek może się to wydać infantylne, porachujmy nieco na liczbach. Przypuśćmy, że mamy dwudziestu pięciu czarnych, pięćdziesięciu białych, Dostojnego, oraz że jest 38 miejsc w ekipie. Wówczas czarny ma prawdopodobieństwo 0,5 znalezienia się w ekipie, natomiast prawdopodobieństwo to dla białego wynosi 0,49. Można więc powiedzieć, że uprzejmość, gdy jest częsta, niewiele kosztuje.

Można wątpić w to, że proponowana procedura losowania zadowoliłaby wszystkich, bowiem rozwiązań zadania, spełniających podane warunki, jest wiele, a kontrpropozycje mogą być równie nęcące. Zaproponujemy teraz nowe rozwiązanie zadania, które można by nazwać „wszyscy czarni albo żaden z nich".

Niech A będzie zdarzeniem losowym o prawdopodobieństwie m/n. Łatwo je zrealizujemy biorąc jeden los z poprzednio utworzonej urny. Niech teraz Dostojny wchodzi do ekipy pierwszy. Jeśli zdarzenie A zachodzi, to do ekipy zalicza się wszystkich czarnych i $m - k - 1$ białych wylosowanych osobno; w przeciwnym razie do ekipy losujemy $m - 1$ białych.

Zauważmy, że, jak poprzednio, prawdopodobieństwo znalezienia się w ekipie dla każdego czarnego jest równe $P(A) = m/n$, natomiast to prawdopodobieństwo dla białego obliczamy w następujący sposób:

$$p = P(A)\frac{m-k-1}{l} + \left(1 - P(A)\right)\frac{m-1}{l} = \frac{1}{l}\left(m - 1 - \frac{km}{n}\right).$$

Rozwiązanie zadania F 264.
Wybierzmy rozmiary materaca: długość $l \approx 2$ m, szerokość $h \approx 0{,}5$ m, grubość $d \approx 0{,}1$ m. Praca W siły zginającej na drodze $s = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{2}$ w czasie zginania materaca jest równa w przybliżeniu $p\Delta V$, gdzie p jest ciśnieniem w materacu (przyjmujemy $p \approx 10^4$ Pa). Natomiast ΔV jest zmianą objętości wynikającą ze zmiany kształtu w obszarze zgięcia ($\Delta V \approx d^2 h$). Wynika stąd, że:

$$W = F \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{2} \approx pd^2 h,$$

co daje

$$F \approx \frac{4pd^2 h}{\pi \cdot l} \approx 30 \text{ N}.$$