Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1989

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z matematyki nr 187, 188

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

187. Na płaszczyźnie z kartezjańskim układem współrzędnych łączymy punkty $(0,0)$ i $(1,1)$ krzywą o parametryzacji $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; $\varphi(0)=\psi(0)=0$, $\varphi(1)=\psi(1)=1$; zakładamy, że φ i ψ są niemalejącymi ciągłymi funkcjami zmiennej $t\in\langle 0;1\rangle$. Czy każdą taką krzywą da się pokryć 10 prostokątami o bokach równoległych do osi układu tak, by pole każdego z nich było nie większe niż 1/100 ?

188. Rozważamy ciąg (x_n) określony wzorem rekurencyjnym $x_{n+1}=|x_n-2^{-n}|$. Przedyskutować (w zależności od wartości początkowego wyrazu $x_0\in\mathbf{R}$) zbieżność ciągu (x_n); w razie zbieżności – znaleźć granicę.

Zadanie **188** zaproponował pan Henryk Kornacki z Augustowa.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1988

Przypominamy treść zadań:

179. Rozwiązać w liczbach nieujemnych równanie

$$\left(\frac{x+(xy)^{1/2}+y}{3}\right)^{1/3}=\left(\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{2}\right)^{1/2}.$$

180. Wykazać, że szachownicę $2^n\times 2^n$, z której wycięto jedno pole, można pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami „trimino" (tj. mającymi kształt litery L złożonej z trzech kwadratów jednostkowych).

179. Wszystkie pary (x,y) takie, że $x=y$, są rozwiązaniami równania. Pokażemy, że innych rozwiązań nie ma. Przypuśćmy, że równanie jest spełnione przez liczby $x,y\geq 0$ nie równe jednocześnie zeru. Przyjmijmy oznaczenia: $c=x^{2/3}+y^{2/3}$, $u=x^{1/3}c^{-1/2}$, $v=y^{1/3}c^{-1/2}$. Liczby u i v związane są zależnością $u^2+v^2=1$, a równanie przybiera po prostych przekształceniach postać

$$u^3+(uv)^{3/2}+v^3=\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Skoro $u^2+v^2=1$ $(u,v\geq 0)$, istnieje liczba $t_0\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$ taka, że $u=\cos t_0$, $v=\sin t_0$. Tak więc funkcja

$$f(t)=(\cos t)^3+(\sin t)^3+(\cos t\sin t)^{3/2},$$

rozważana na przedziale $\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$, przyjmuje dla $t=t_0$ wartość $\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Jej pochodna

$$f'(t)=\frac{3}{2}(\cos t\sin t)^{1/2}(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t-2(\cos t\sin t)^{1/2})$$

jest dodatnia w przedziale $(0;\frac{\pi}{4})$, a ujemna w $(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2})$. Zatem f przyjmuje w punkcie $\frac{\pi}{4}$ (i tylko tam) swą wartość maksymalną $f(\frac{\pi}{4})=\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Wobec tego $t_0=\frac{\pi}{4}$, a to znaczy, że $u=v$, czyli $x=y$. [Inne rozwiązanie: Można przyjąć, że $x>0$. Przez podstawienie $y/x=t^6$ sprowadzamy równanie do postaci $8(1+t^3+t^6)^2=9(1+t^4)^3$. Różnica między prawą a lewą stroną daje się następnie (pomijamy szczegóły przekształceń) wyrazić jako iloczyn

$$(t-1)^4\left(t^4(t+2)^2(t^2+1)+(2t+1)^2(t^2+1)+5t^2(t^2-1)^2\right);$$

jest więc zerem tylko dla $t=1$, co odpowiada temu, że w wyjściowym równaniu musi być $x=y$.]

180. Indukcja. Szachownica $2^1\times 2^1$ bez pola – to pojedyncze trimino. Załóżmy prawdziwość tezy dla pewnego n i weźmy szachownicę $2^{n+1}\times 2^{n+1}$ bez jednego pola. Dzielimy ją na cztery szachownice A, B, C, D o wymiarach $2^n\times 2^n$. Powiedzmy, że brakujące pole P znajdowało się w kwadracie A. Z każdego z kwadratów B, C, D usuwamy pole mające wierzchołek w punkcie środkowym dużego kwadratu. W myśl założenia indukcyjnego możemy pokryć płytkami trimino zarówno kwadrat A bez pola P, jak i kwadraty B, C, D (każdy bez jednego pola) – a trzy pola usunięte z tych trzech kwadratów dają się nakryć jeszcze jedną płytką. Stąd słuszność tezy dla $n+1$, więc i – przez indukcję – dla wszystkich n.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 173 (WT=3,09) i 174 (WT=1,26) z numeru 8/1988

Krzysztof Jedziniak	– Katowice	44,86pkt
Adam Ruszel	– Krosno	43,81pkt
Adam Przeździecki	– Warszawa	42,85pkt
Edward Orzechowski	– Warszawa	42,03pkt
Kazimierz Serbin	– Sanok	40,12pkt
Andrzej Bonk	– Chełmża	39,99pkt

Pan Jedziniak po raz wtóry zgromadził 44 punkty

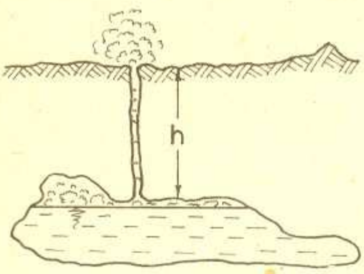
$\sqrt{\sum !}=44$

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Zadania z fizyki nr 85, 86

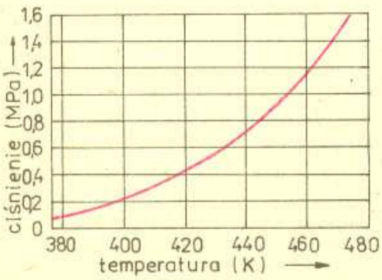
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

85. W płaskim kondensatorze jedna z dwu poziomych okładek o powierzchni S jest zawieszona na czterech jednakowych sprężynkach o współczynniku sprężystości k nad drugą, nieruchomą okładką. W stanie nie naładowanym odległość między okładkami wynosi d_0. Kondensator ładujemy impulsowo (zaniedbywalny czas ładowania) do napięcia U. Przy jakiej wartości U nastąpi zetknięcie się okładek?



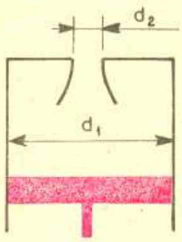
Rys. 1

86. Rozpatrzmy gejzer mający duży, podziemny zbiornik wody nagrzewany ciepłem Ziemi oraz wąski kanał łączący ten zbiornik z powierzchnią Ziemi (rys. 1). Aktywność gejzera ma charakter okresowy. Podczas okresu spokojnego zbiornik oraz kanał są w całości wypełnione wodą. Z chwilą, gdy woda w podziemnym zbiorniku osiągnie temperaturę wrzenia, zaczyna się aktywny okres gejzera. Przyjmując, że podczas trwania okresu aktywnego – który jest znacznie krótszy od okresu spokojnego – cały kanał wypełnia uchodząca na zewnątrz para wodna, oszacować, jaka część wody zawartej początkowo w zbiorniku gejzera ulega wyrzuceniu w postaci pary, jeśli kanał sięga na głębokość $h = 100$ m.
Przybliżone wartości ciepła parowania oraz ciepła właściwego wody wynoszą odpowiednio $r = 2 \cdot 10^6$ J/kg oraz $c = 4 \cdot 10^3$ J/kgK. Na rysunku 2 przedstawiono zależność ciśnienia nasyconej pary wodnej od temperatury.

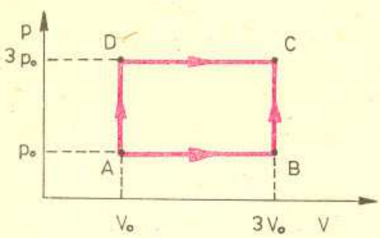


Rys. 2

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1988



Rys. 3



Rys. 4

Przypominamy treść zadań:

77. Jaką co najmniej siłą F trzeba działać na tłok strzykawki, aby wylatujący z niej przez otworek w górnej ściance strumień wody wznosił się na wysokość $h = 5$ m? Średnica tłoka $d_1 = 30$ mm, średnica otworu w ściance – $d_2 = 1$ mm. Czy zaopatrzenie otworu w dyszkę jak na rysunku 3 będzie miało wpływ na siłę F oraz na prędkość przesuwu tłoka?

78. Obliczyć stosunek ilości ciepła pobranego przez jednoatomowy gaz doskonały w dwóch wariantach przemiany (rys. 4): 1) $A \to B \to C$, 2) $A \to D \to C$.

77. Gdyby nie było żadnych strat energii (na tarcie tłoka o ścianki, opór powietrza itp.), przyrost energii potencjalnej porcji wody o masie Δm, wyrzuconej na wysokość h, $\Delta E = \Delta mgh$ (g – przyspieszenie ziemskie) byłby równy pracy tłoka nad wyciśnięciem tej ilości wody ze strzykawki $\Delta L = F\Delta l$, gdzie $\Delta l = 4\Delta m/\rho\pi d_1{}^2$ jest odpowiednim przesunięciem tłoka (ρ – gęstość wody).
Z przyrównania $\Delta E = \Delta L$ wynika $F = \pi d_1{}^2 \rho g h/4 = 34N$. Wobec występowania różnych oporów wzór ten określa dolną granicę rzeczywiście wymaganej siły. Zastosowanie dyszy nie ma wpływu na powyższe rozumowanie, a więc i na jego wynik dotyczący siły (wynik ten jest niezależny od średnicy d_2). Wpływa natomiast na wielkość strumienia wypływającej wody. O ile bowiem struga cieczy wypływającej z otworu w cienkiej ściance, ze względu na zachodzące w strudze przyspieszanie cieczy, ma kształt zwężający się (jej średnica w miejscu maksymalnej prędkości jest mniejsza od średnicy otworu), o tyle w przypadku dyszy o podanym kształcie przyspieszenie cieczy nastąpi wewnątrz samej dyszy i wylatująca struga będzie miała kształt walca o średnicy otworu wylotowego. Zaopatrzenie otworu w strzykawce w dyszkę zwiększy więc wielkość strumienia wypływającej wody, a zatem także prędkość przesuwu tłoka.

78. Z praw przemian gazowych – izobarycznej i izochorycznej – wynikają związki między temperaturami odpowiadającymi punktom A, B, C i D: $T_B = 3T_A$, $T_D = 3T_A$, $T_C = 9T_A$. Ilości ciepła pobrane przez gaz w poszczególnych przemianach cząstkowych wynoszą zatem odpowiednio: $Q_{AB} = 2nC_PT_A$, $Q_{BC} = 6nC_VT_A$, $Q_{AD} = 2nC_VT_A$, $Q_{DC} = 6nC_PT_A$, gdzie n – liczba moli gazu, C_P – molowe ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, C_V – molowe ciepło właściwe przy stałej objętości.
Poszukiwany stosunek jest równy

$$k = \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{Q_{AD} + Q_{DC}} = \frac{6 + 2\kappa}{2 + 6\kappa}, \qquad \text{gdzie } \kappa = \frac{C_P}{C_V}.$$

Dla jednoatomowego gazu doskonałego $\kappa = 5/3$, zatem $k = 7/9$. Wynik nie zależy, oczywiście, od ilości użytego gazu.

Bliższe omówienie problemu wypływu cieczy przez otwór oraz rurki o różnych kształtach można znaleźć w książce A. Nadolny, K. Pniewska: *Olimpiady Fizyczne XXIX-XXXI*, WSiP, Warszawa 1986, str. 173-175.

Czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 71 (WT=2,01) i 72 (WT=1,58) z numeru 8/1988

Roman Musiał	– Katowice	34,79	pkt
Adam Sikorski	– Lublin	32,75	pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	32,26	pkt
Wiesław Kacprzak	– Kraków	31,42	pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	31,31	pkt