

Sumy współczynników dwumianowych

Jedną z podstawowych własności współczynników rozwinięcia potęgi dwumianu jest równość $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$, która daje prosty wzór na sumę liczb występujących w n -tym wierszu trójkąta Pascala. A jaka będzie suma co drugiej liczby w n -tym wierszu? Okazuje się, że

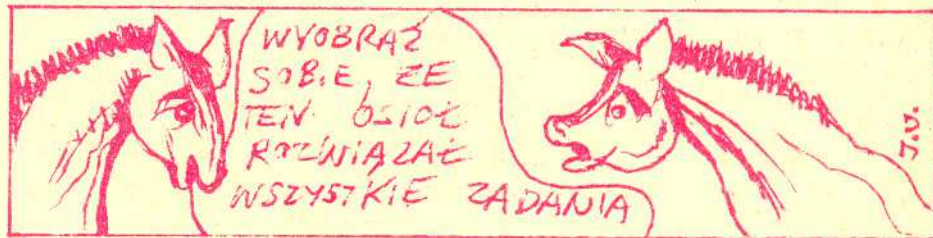
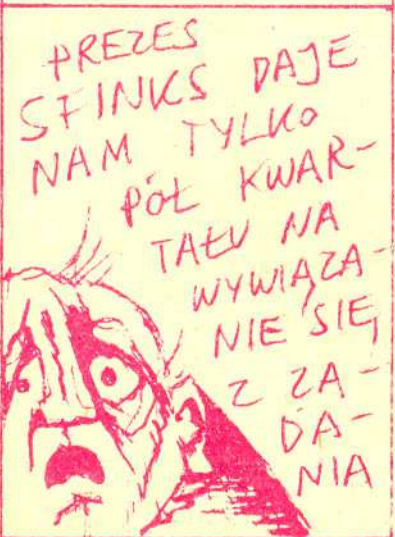
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1} = \frac{2^n}{2},$$

czyli sumując co drugą liczbę otrzymamy wynik niezależny od tego, czy rozpoczynamy dodawanie od $\binom{n}{0}$, czy od $\binom{n}{1}$. Dowód powyższych faktów jest prosty: wystarczy przedstawić w postaci sumy liczby $(1+1)^n$ i $(1-1)^n$. A ile wynosi suma co trzeciego wyrazu: $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$? Czyżby $\frac{2^n}{3}$? Niestety, nie. To musi być liczba całkowita! I oto mamy problem do zbadania: Obliczyć sumę $\binom{n}{l} + \binom{n}{l+k} + \binom{n}{l+2k} + \dots$, gdzie $l < k$. Zagadnienie to wiąże się ściśle z następującym pytaniem: Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po n rzutach monetą liczba orłów będzie podzielna przez k z resztą l ? Można też rozważać sumy kwadratów wyrazów trójkąta Pascala. Wiadomo bowiem, że

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

A jeśli wziąć w tej sumie co drugi (lub co k -ty) składnik?

J. W.



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 535. Oto przepis na elipsę z poradnika dla majsterkowiczów: owijamy walec papierem i rysujemy cyrklem „okrąg”. Po rozprostowaniu papieru otrzymamy elipsę. Czy rzeczywiście?

Rozwiązanie na str. 2

M 536. Ogólnie znany przepis na prostą: zgiąć kartkę papieru. Linia zgięcia jest prosta – dlaczego?

Rozwiązanie na str. 10

M 537. Funkcja ciągła f ma następującą własność: jeśli $x - y = 1$, to $f(x) - f(y) = 1$. Czy f musi być liniowa?

Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 264. Ocenić siłę, jaką należy przyłożyć do krawędzi nadmuchiwanego materaca tak, aby zgiąć go pod kątem 90° . Zakładamy, że materac składa się z jednej części i nie ma poprzecznych szwów oraz jest dobrze napompowany.

Rozwiązanie na str. 3

F 265. Dziecięcy balonik napęczniony jest gorącym powietrzem. Przy jakiej temperaturze powietrza w baloniku będzie mógł się on unieść?

Temperatura T_0 otoczenia wynosi około 300 K.

Rozwiązanie na str. 4