Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1989

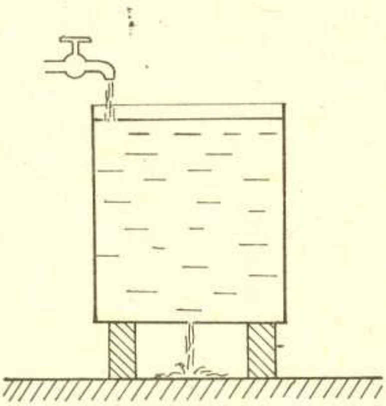
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1989.

Zadania z fizyki nr 83, 84

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

83. Cylindryczna, pionowo ustawiona beczka napełnia się z kranu w ciągu 10 minut, a opróżnia przez otwór w dnie w ciągu 15 minut. Co się stanie, jeśli będziemy napełniać z kranu beczkę z otwartym otworem ?



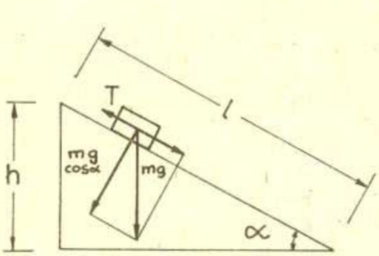
84. Piłkarz potrafi kopnąć piłkę na maksymalną odległość Z. Jaki obszar położony za cienką, pionową ścianą o wysokości H i odległą o D od piłkarza jest objęty jej „cieniem", tzn. jest nieosiągalny przez piłkę ? Zaniedbać opór powietrza, rozmiary piłki oraz założyć, że $Z > D > 2H$. Przedyskutować rozwiązanie w zależności od początkowej szybkości piłki.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1988

Przypominamy treść zadań:

75. Na szczycie równi pochyłej o długości $l = 1,5$ m, nachylonej pod kątem $\alpha = 30°$ względem poziomu, umieszczono nieruchomo i puszczono mały klocek. Współczynnik tarcia między klockiem a równią rośnie liniowo wzdłuż równi od wartości 0 na jej szczycie do wartości 1 na jej dolnym krańcu. Obliczyć prędkość klocka na dolnym krańcu równi.

76. W generatorze van de Graafa ładunki przenoszone przez taśmę z dielektryka o szerokości $d = 1$ m, poruszającą się z prędkością $v = 20$ m/s, ładują metalową, sferyczną elektrodę o promieniu $r = 1,5$ m. Oszacować maksymalne wartości uzyskiwanego w tym generatorze napięcia oraz natężenia prądu stałego, który można z niego czerpać. Graniczna wartość natężenia pola elektrycznego, powyżej której powstaje przebicie w powietrzu, wynosi $E_p = 3 \cdot 10^6$ V/m.



75. Siła tarcia, działająca na klocek w odległości x od górnego krańca równi ma wartość

$$T = \frac{x}{l} mg\cos\alpha, \tag{1}$$

gdzie m – masa klocka, g – przyspieszenie ziemskie. Energia kinetyczna klocka na dolnym krańcu równi (przy założeniu, że klocek tam dotrze) wyniesie

$$mv^2/2 = mgh - W_t, \tag{2}$$

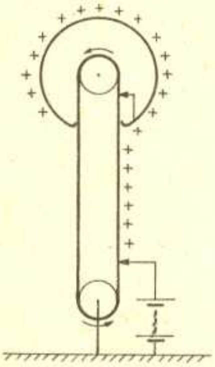
gdzie v oznacza prędkość klocka na dolnym krańcu równi, h – jej wysokość, W_t – pracę wykonaną przez klocek na pokonanie sił tarcia. Pracę tę obliczamy (stosując całkowanie lub metodę graficzną) na podstawie wzoru (1)):

$$W_t = (mgl\cos\alpha)/2.$$

Podstawiając to wyrażenie oraz $h = l\sin\alpha$ do wzoru (2) otrzymujemy wyrażenie na poszukiwaną prędkość

$$v = \sqrt{gl(2\sin\alpha - \cos\alpha)}.$$

Dla podanych w zadaniu wartości l oraz α otrzymujemy $v = 1,4$ m/s.



76. Napięcie, jakie można uzyskiwać w generatorze, jest ograniczone przez zjawisko przebicia powietrza w pobliżu naładowanej kuli. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni kuli naładowanej do potencjału (napięcia względem Ziemi) V wynosi $E_k = V/r$. Stąd maksymalna wartość napięcia jest równa $V_{max} = E_p r = 4,5$ MV. Maksymalne natężenie czerpanego z generatora prądu stałego odpowiada natężeniu strumienia ładunku przenoszonego przez taśmę dielektryczną $I = \sigma dv$, gdzie σ jest powierzchniową gęstością ładunku. Natężenie pola elektrycznego przy powierzchni taśmy (z dala od jej krawędzi) wynosi $E_t = \sigma/(2\varepsilon_0)$ (patrz rozwiązanie zadania 31 w numerze 12/1986). I znowu z warunku ograniczenia przez przebicie wynika maksymalna wartość tego natężenia $I_{max} = 2\varepsilon_0 E_p dv \approx 1$ mA. Natężenie realnie osiąganego prądu będzie niższe ze względu na mniejszą gęstość powierzchniową ładunku przy krawędziach taśmy.

Zadania z matematyki nr 185, 186

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

185. Wyznaczyć największą liczbę λ o tej własności, że każdy przedział domknięty $I \subset (0;1)$ można przekształcić przez jednokładność o środku 0 i skali będącej liczbą naturalną na przedział J o długości $\geq \lambda$, nie zawierający żadnej liczby całkowitej.

186. Podać warunki konieczne i dostateczne, jakie powinny spełniać liczby dodatnie S_1, S_2, S_3, S_4, aby istniał czworościan mający ściany o polach S_1, S_2, S_3, S_4.

Zadanie 186 zaproponował pan Arkadiusz Goetz z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1988

Przypominamy treść zadań:

177. Wyznaczyć wszystkie ściśle rosnące funkcje $f: R \to R$ spełniające równanie $f(f(x)+y) = f(x+y)+1$.

178. Znaleźć kres górny sumy długości wszystkich cięciw wyznaczonych przez n punktów okręgu o promieniu 1 (dla ustalonego $n \geq 2$).

177. Załóżmy, że różnowartościowa funkcja f spełnia podane równanie. Przyjmując $y = -x$ otrzymujemy związek $f(f(x)-x) = f(0)+1$. Z różnowartościowości f wynika, że wyrażenie w nawiasie po lewej stronie musi być wielkością stałą, a więc $f(x) = x + c$. Przez podstawienie sprawdzamy, że funkcja tej postaci spełnia dane równanie wtedy i tylko wtedy, gdy $c = 1$. Zatem funkcja $f(x) = x + 1$ jest jedynym rozwiązaniem równania.

178. Ustalmy okrąg C o promieniu 1, punkt P_0 leżący na nim oraz kierunek obiegu okręgu. Możemy przyjąć, że rozpatrywane w zadaniu punkty leżą na okręgu C i że P_0 jest jednym z nich. Dla dowolnego zbioru $X = \{P_0, P_1, ..., P_{n-1}\} \subset C$ (numeracja punktów zgodna z przyjętym kierunkiem obiegu) i dla dowolnej liczby naturalnej $k < n$ przyjmijmy

$$s_k(X) = \sum_{i=0}^{n-1} |P_i P_{i+k}| \quad (i+k \text{ brane modulo } n)$$

(Liczba $s_1(X) = s_{n-1}(X)$ jest długością obwodu wielokąta $P_0P_1...P_{n-1}P_0$; liczba $s_2(X) = s_{n-2}(X)$ jest sumą długości cięciw „przeskakujących” co drugi wierzchołek itd.). Rozważana w zadaniu wielkość jest równa sumie

$$s(X) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} s_k(X).$$

Przyjmując naturalną parametryzację okręgu możemy utożsamiać każdy taki zbiór X z układem liczb $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_{n-1} \leq 2\pi$ (dopuszczamy więc układy zdegenerowane, w których niektóre punkty pokrywają się). Każda z wielkości $s_k(X)$ jest funkcją ciągłą układu zmiennych $(t_1, ..., t_{n-1})$ – osiąga więc dla pewnego układu X swą wartość maksymalną.

Gdy $NWD(n,k) = 1$, wówczas odcinki, których długości składają się na sumę $s_k(X)$, tworzą łamaną zamkniętą $P_0P_kP_{2k}...P_0$ (zwykłą dla $k = 1$ oraz $k = n-1$, gwiaździstą dla innych k). W tym przypadku $s_k(X)$ osiąga maksimum tylko wtedy, gdy wszystkie odcinki są równe; gdyby bowiem dla pewnych trzech kolejnych wierzchołków K, L, M łamanej $P_0P_kP_{2k}...P_0$ zachodziła nierowność $|KL| \neq |LM|$, to przesuwając punkt L w stronę środka łuku KM (i nie zmieniając położenia pozostałych punktów) zwiększylibyśmy wartość sumy $s_k(X)$.

Gdy $NWD(n,k) = d > 1$, wówczas odcinki występujące w określeniu $s_k(x)$ dzielą się na d klas tak, że odcinki każdej z tych klas tworzą łamaną zamkniętą o n/d bokach $(P_0P_kP_{2k}...P_0; P_1P_{1+k}P_{1+2k}...P_1$; itd.; w szczególności, gdy n jest parzyste, a $k = n/2$, każda z nich redukuje się do przebieganego „tam i z powrotem” odcinka). Na mocy poprzedniego przypadku, aby wielkość $s_k(X)$ osiągnęła maksimum, każda z tych d łamanych musi mieć równe boki.

Wynika stąd, że wszystkie składniki sumy $2s = s_1 + s_2 + ... + s_{n-1}$ jednocześnie przyjmują swą wartość maksymalną, gdy X jest zbiorem wierzchołków n-kąta foremnego; przy tym składniki s_k z $NWD(n,k) = 1$ w każdym innym przypadku przyjmują wartość mniejszą. Zatem wartość $s(X)$ jest największa wtedy i tylko wtedy, gdy punkty zbioru X rozpinają wielokąt foremny. A wówczas $s_k(X) = 2n\sin(k\pi/n)$; tak więc

$$s(X) = n\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = n\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} - \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = n\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

Jest to szukane maksimum.