KĄCIK PRAC *uczniowskich*

Różniczkowanie ciągów

Jednym z podstawowych pojęć analizy matematycznej jest pojęcie pochodnej funkcji zmiennej rzeczywistej. Można też różniczkować funkcje zmiennej naturalnej, czyli po prostu ciągi liczbowe. Przyjmujemy wtedy następującą definicję:

Niech $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ będzie ciągiem liczbowym. Pochodną ciągu $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ nazwiemy ciąg $(a_n')_{n\in\mathrm{N}}$, gdzie $a_n' = a_{n+1} - a_n$.

Od razu rzuca się w oczy prostota tego pojęcia. Po pierwsze: prosty wzór algebraiczny złożony tylko z jednego odejmowania. Nie ma żadnego dzielenia, nie mówiąc już o przechodzeniu do granicy. Po drugie: możliwość łatwego operowania przykładami. Nie można „zobaczyć" kawałka funkcji nie mając danego wzoru, nie sposób bowiem wypisać tabeli wszystkich wartości funkcji, np. w przedziale (0,1). Tym samym znalezienie pochodnej funkcji chociażby w jednym punkcie wymaga użycia wzoru określającego tę funkcję. Kawałek ciągu to kilka liczb, które można wypisać, a obliczenie pochodnej ciągu w punkcie wymaga tylko znajomości dwóch kolejnych wyrazów. Jeśli więc mamy wypisany początek jakiegoś ciągu, to od razu możemy wypisać początek jego pochodnej. Przy tym troska o różniczkowalność jest zupełnie zbyteczna. Jakkolwiek z formalnego punktu widzenia początek ciągu nie mówi nic o jego dalszej części, to jednak wszyscy wiemy, że jeśli wzór na wyraz ogólny ciągu nie jest zbytnio skomplikowany, to znając kilka początkowych wyrazów możemy zgadnąć, o jaki ciąg chodzi. A to wystarczy do empirycznego wysuwania hipotez, które, rzecz jasna, trzeba potem udowodnić.

Proste wzory i łatwość operowania przykładami dają nam możliwość budowania teorii podobnej do rachunku różniczkowego i całkowego. Całkowanie też jest bardzo proste: dodajemy kilka kolejnych wyrazów ciągu. A oto przykładowe zagadnienia, od których można zacząć tę teorię:

1) wzory rachunkowe na obliczanie pochodnej i całki prostych ciągów,

2) rozwiązywanie prostych równań „różniczkowych",

3) różniczkowanie cząstkowe ciągów indeksowanych kilkoma liczbami.

Warto zbadać, jakie wzory i twierdzenia przenoszą się z tradycyjnego rachunku różniczkowego bez zmian, a jakie wymagają modyfikacji.

I na zakończenie przykład:

Obliczyć sumę $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$.

A oto rozwiązanie: Niech dana suma będzie równa $\frac{a_n}{2^n}$. Trzeba znaleźć wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n) określonego wzorami: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + (n+1)$. Nie chodzi nam o dowód poprawności wzoru, ale przede wszystkim o jego zgadnięcie (dowód nie powinien być trudny). Wypisujemy ciąg (a_n):

1, 4, 11, 26, 57, 120, 247, ...

Nie widzimy szukanego wzoru, więc próbujemy różniczkować:

3, 7, 15, 31, 63, 127, ...

Niejeden dostrzeże tu pewną regularność, pozostali różniczkują jeszcze raz

4, 8, 16, 32, 64, ...

Kto w tym momencie nie dostrzega postępu geometrycznego, niech się nawet do tego nie przyznaje.

Gdybyśmy dysponowali wzorami na całkowanie ciągów, wiedzielibyśmy, że $\int 2\cdot 2^n = 2\cdot 2^n + C$, więc $C = -1$, a zatem drugi ciąg dany jest wzorem $2\cdot 2^n - 1$, co można było dostrzec przy odrobinie spostrzegawczości. I wreszcie wzór na wyjściowy ciąg $\int 2\cdot 2^n - 1 = 2\cdot 2^n - n + C$, skąd $C = -2$. Zatem $a_n = 2\cdot 2^n - n - 2$, co, jak na razie, nie zostało udowodnione, ale tylko zgadnięte. Lecz zgadnięcie wzoru stanowi najtrudniejszą część tego zadania.

Mamy więc przykład, jak można wykorzystać różniczkowanie ciągów. Oczywiście, mając więcej wprawy w różniczkowaniu i całkowaniu można atakować odpowiednio bardziej skomplikowane przykłady.

J. W.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje mgr Anna LIPNIACKA

TAJEMNICZE NEUTRINO

19 października 1988 r. nagrodę Nobla z fizyki przyznano Leonowi Ledermanowi, Melvinowi Schwartzowi i Jackowi Steinbergerowi za odkrycie neutrina mionowego i rozwój techniki wiązek neutrinowych. Technika ta, rozwijająca się od 1962 r., umożliwiła m.in. pomiar rozkładu przestrzennego kwarków w protonie. Antyneutrino ($\overline{\nu}_e$) emitowane wraz z elektronem (e^-) w rozpadzie beta było znane od 1931 r. Reaguje ono bardzo „niechętnie" z materią, mimo to w 1956 r. udało się zaobserwować absorbcję antyneutrina przez atom Cl z jednoczesną emisją pozytonu (e^+). W 1936 r. odkryto mion (μ), powstający w towarzystwie neutrina, w rozpadzie kosmicznych pionów (π). Wszystkie własności tej tajemniczej cząstki są identyczne z własnościami elektronu, z tym że mion jest około 200 razy cięższy. Gdyby mion był wzbudzonym elektronem, emitowałby nadmiar swojej energii w postaci fotonów, zamieniając się w zwyczajny elektron. Reakcji takiej nigdy nie zaobserwowano. Eksperyment wykonany w 1962 r. w Brokhaven National Laboratory wykazał, że neutrino powstające wraz z mionem w rozpadzie π jest różne od neutrina z rozpadu beta. Wytworzono 10^{14} neutrin, 50 zareagowało w 10-tonowym detektorze, we wszystkich przypadkach produkując miony. Do dziś nie wiadomo, dlaczego neutrina mionowe różnią się od elektronowych, a miony od elektronów. Tymczasem odkryto taon, około 3 600 razy cięższy od elektronu, o identycznych własnościach. Taon ma także swoje neutrino.