Dwa wieki mechaniki analitycznej

Mgr Henryk DROZDOWSKI

Lagrange powiedział kiedyś, że Newton był najszczęśliwszym człowiekiem. Istnieje bowiem tylko jeden Wszechświat i właśnie Newton odkrył prawa nim rządzące. Lagrange'owi jednak przypadło w udziale uzupełnienie teorii Newtona. To właśnie on posunął naprzód jego dzieło.

Dwieście lat temu ukazała się w Paryżu epokowa praca Lagrange'a *Mechanique analytique* (*Mechanika analityczna*), która była rozwinięciem i ukoronowaniem mechaniki Newtona. Sformułowane w niej zasady mechaniki klasycznej przetrwały w postaci nie zmienionej do czasów dzisiejszych. W przedmowie Lagrange stwierdził, że w jego książce nie ma rysunków, ponieważ metoda, którą stosował, nie wymaga rozważań natury geometrycznej bądź mechanicznej, a tylko operacji algebraicznych, które muszą następować w odpowiednim porządku. W rękach Lagrange'a mechanika stała się częścią analizy, którą nazwał „geometrią czterech wymiarów".

Mechanika ta została zbudowana w sposób czysto matematyczny, przy użyciu metod geometrii analitycznej i rachunku różniczkowego. Lagrange wyłożył i rozwinął w niej swą metodę wariacji stałych. Pełne wykorzystanie rachunku wariacyjnego umożliwiło mu ujednolicenie różnych zasad statyki i dynamiki. W statyce uzyskał tę jednolitość przez zastosowanie metody przemieszczeń wirtualnych, a w dynamice przez zastosowanie metody d'Alemberta.

Mechanika sformułowana przez Lagrange'a jest przykładem różnego od Newtona spojrzenia na dynamikę. W mechanice Newtona zasadniczą rolę odgrywa pojęcie siły, która jest czynnikiem zewnętrznym działającym na ciało. W mechanice Lagrange'a pojęcie siły nie występuje, używa się tylko pojęcia energii (kinetycznej i potencjalnej) jako własności ciała. Jednakże w przypadku występowania więzów ruchu zastosowanie równań Newtona wymagało znajomości sił przez nie uwarunkowanych, gdyż w równaniach tych występuje całkowita siła zewnętrzna działająca na punkt materialny. W wielu sytuacjach podanie w postaci analitycznej sił uwarunkowanych więzami nie było możliwe. Powstała więc potrzeba sformułowania ogólnej metody, która służyłaby do rozwiązywania skomplikowanych problemów ruchu. Lagrange nie tylko wskazał, jak znaleźć siłę działającą na ciało, jeśli zna się energię potencjalną, lecz również odkrył najbardziej skuteczną metodę rozwiązywania wielu problemów w mechanice posługując się pojęciem potencjału. W swojej *Mechanice* pisał: *Podczas gdy sprecyzowanie charakteru sił, które działają na ciało, może być bardzo skomplikowane lub nawet niemożliwe, to podanie wyrażeń na energię kinetyczną i potencjalną może być o wiele łatwiejsze.*

Rozważmy teraz ruch jednego lub więcej ciał pod wpływem działania różnych sił. Dla każdego punktu przestrzeni wypiszmy energię kinetyczną $\frac{1}{2}mv^2$ wszystkich znajdujących się w nim ciał i odejmijmy od niej ich energię potencjalną. Otrzymujemy wówczas wyrażenie zwane lagranżianem (funkcja Lagrange'a); definiuje się je jako różnicę między energią kinetyczną E_k i potencjalną U: $L = E_k - U$. Wprowadźmy – za Lagrangem – „współrzędne uogólnione", charakteryzujące całkowicie położenie układu. Współrzędne te są lepiej dopasowane do rozważanego konkretnie układu i dlatego są dogodniejsze. Wreszcie możemy napisać słynne równanie Lagrange'a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, s,$$

gdzie: q_k – współrzędna uogólniona, $\dot{q}_k$ – prędkość uogólniona, L – lagranżian.

Równanie to odnosi się do nieswobodnego układu o s stopniach swobody. Z matematycznego punktu widzenia równanie to przedstawia układ równań różniczkowych drugiego rzędu dla s niewiadomych funkcji $q_k(t)$; ogólne rozwiązanie takiego układu zawiera $2s$ stałych dowolnych, koniecznych do pełnego określenia ruchu tego układu (z danych warunków początkowych i brzegowych).

Jeśli dane są wszystkie współrzędne uogólnione $q_1, q_2, \ldots, q_s$ i wszystkie prędkości uogólnione: $\dot{q}_k = \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}$, to tym samym stan mechaniczny układu jest całkowicie określony.

Całkując równania Lagrange'a otrzymujemy współrzędne uogólnione $q_1, q_2, \ldots, q_s$ jako funkcje czasu t, a więc tym samym znajdujemy rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia dynamiki.

Za pomocą równań Lagrange'a możemy rozwiązywać dwa typy zagadnień: 1) znając siły działające na układ, możemy wyznaczyć równania różniczkowe ruchu; 2) znając równania ruchu możemy wyznaczyć siły czynne działające na układ.

Zaleta sformułowania Lagrange'a w porównaniu z opisem Newtona szczególnie jasno uwidacznia się wówczas, gdy ruch cząstki podlega więzom. W tym przypadku liczba użytych współrzędnych uogólnionych nie jest większa niż liczba stopni swobody układu. Znaczy to, że wszystkie współrzędne są od siebie jawnie niezależne. Właśnie na pominięciu nieznanych i często trudnych do wyrażenia sił więzów polega doniosłość równań Lagrange'a.

Czy równania te i „zwykłe" równania Newtona są równoważne ? Oczywiście, tak, konkretne rozwiązania są identyczne z tymi, które się otrzyma korzystając bezpośrednio z praw Newtona, ale w wielu zagadnieniach teoria Lagrange'a upraszcza sposób rozwiązania. Równania Lagrange'a dotyczą wszelkich przebiegów dynamicznych i ułatwiają ich analizę. Pozwoliły wyczerpująco zbadać szereg ważnych zagadnień mechaniki, na przykład zagadnienia w teorii małych drgań i w dynamice ciała sztywnego. Lagrange ponadto wyprowadził w swojej *Mechanice* zasadę zachowania energii mechanicznej (została ona poźniej nazwana ogólnie „twierdzeniem o żywej sile") w postaci całki równań ruchu.

Z równań Lagrange'a można wyprowadzić zasady: Maupertuisa – najmniejszego działania, Fermata – najkrótszego czasu i Gaussa – najmniejszego przymusu.

Dwieście lat temu Lagrange stworzył mechanikę teoretyczną, której zasady mają szerokie zastosowanie w teorii względności, we współczesnej mechanice kwantowej i kwantowej teorii pola. Charakterystyczną cechą mechaniki analitycznej jest to, że u jej podstaw kładzie się ogólne zasady (różniczkowe i całkowe) i z nich wyprowadza się następnie na drodze analitycznej podstawowe równania różniczkowe ruchu.

Równania Lagrange'a mają znaczenie uniwersalne – za ich pomocą można sformułować nie tylko równania mechaniki, lecz także, na przykład, równania pola elektromagnetycznego.

Na zakończenie warto wspomnieć, że *Mechanika analityczna* Lagrange'a powstała w sto lat po ukazaniu się *Principiów* Newtona i na równi z tym dziełem wytyczyła kierunki współczesnej fizyki.

Od redakcji: Po rozszerzenie i wyjaśnienia do materiału w powyższym artykule odsyłamy do książki *Mechanika teoretyczna* W. Rubinowicza i W. Królikowskiego.