

Rys.1. Trzy nieliniowe oscylatory (masy powiązane sprężynkami nie spełniającymi prawa Hooke'a) połączone w płaski układ. Wychylenia kolejnych mas z ich położenia równowagi oznaczono odpowiednio przez u_1 , u_2 i u_3 . Równania ruchu mas, zapisane w formie różnicowej, mają następującą postać

$$\ddot{u}_j(t_n) \approx \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t} - \frac{u_j(t_n) - u_j(t_{n-1}))}{\Delta t} = F(u_{j+1}(t_n) - u_j(t_n)) - F(u_j(t_n) - u_{j-1}(t_n)) \quad \text{dla } j = 1, 2, 3,$$

gdzie kropki oznaczają, jak zwykle, pochodną względem czasu, natomiast siła F dana jest wzorem

$$F(z) = z - \alpha z^2.$$

W powyższych wzorach oznaczyliśmy $z = u_{j+1} - u_j$, $j = 1, 2, 3$, przy czym $u_0 = u_3$ i $u_4 = u_1$.

Równania ruchu tych oscylatorów możemy znacznie uprościć przeprowadzając zamianę zmiennych. Postępując tak jak Lunsford i Ford, otrzymamy równania ruchu w następującej postaci:

$$\ddot{q}_1 = -q_1 - 2q_1q_2,$$

$$\ddot{q}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2.$$

Spróbujcie sami swoich sił w rachunkach działając kilkietapowo. Najpierw przechodzimy do nowych zmiennych ξ_j , $j = 1, 2, 3$, gdzie

$$u_j = \sum_{k=1}^3 A_{jk} \xi_k, \quad [A_{jk}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

W zmiennych ξ_j równania ruchu przybierają następującą postać:

$$\ddot{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_3 - 2\ddot{u}_2) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2)\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\xi_1 - \xi_2)\right) \right],$$

$$\ddot{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ddot{u}_1 - \ddot{u}_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2)\right) - 2F(\sqrt{2}\xi_2) + F(-\sqrt{2}\xi_2) \right],$$

$$\ddot{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + \ddot{u}_3) = 0.$$

Proszę zauważyć, że przekształcenie A zostało tak dobrane, aby prędkość $\dot{\xi}_3$ była stała. Po drugie, żadne z równań ruchu nie zawiera już ξ_3 . Oznacza to, że możemy rozpatrywać nasze oscylatory w dwuwymiarowym układzie współrzędnych (ξ_1, ξ_2) . Na koniec przeskalowujemy zmienne $q_j = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \xi_j$, $j = 1, 2$ oraz czas $t \rightarrow \sqrt{3}t$. Prowadzi to także do przeskalowania

energii $E \rightarrow \frac{\alpha^2}{6} E$.

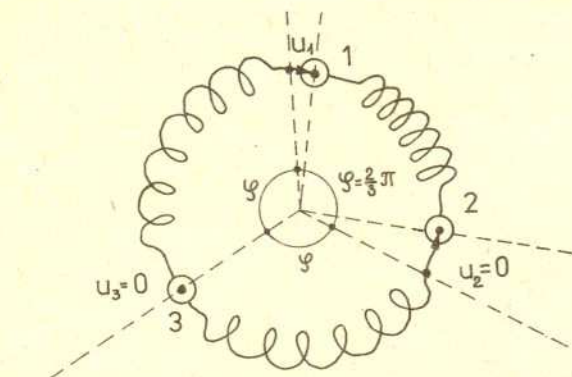
Równania tej postaci otrzymali Hénon i Heiles analizując trójwymiarowy ruch gwiazdy w galaktyce mającej symetrię walcową. (Proszę przy okazji zwrócić uwagę na wspaniałą intelektualną wolę: z jednej strony anharmoniczne oscylatory, z drugiej - galaktyki pełne gwiazd.)

Powyższy układ dwóch równań nieliniowych można rozwiązać metodą ekstrapolacji parabolicznej (o tej metodzie możecie przeczytać także w *Kąciku Fizyki Komputerowej* nr 5, *Fizyka w Szkole* nr 3/1988). Załączony program komputerowy znajduje rozwiązanie w głównej pętli zatytułowanej „Dynamika”, między liniami 730 i 870. Proszę zauważyć, że zastosowano następujące oznaczenia: $x_j = q_j(t_{n+1})$, $q_j = q_j(t_n)$, $u_j = q_j(t_{n-1})$, $j = 1, 2$. Ponadto wprowadzono pomocniczą zmienną $p_j = \dot{q}_j(t_n)$.

Najważniejsze wyniki

Rezultaty obliczeń można obejrzeć na rysunkach 2, 3 i 5. Otrzymano je dla trzech różnych wartości całkowitej energii układu.

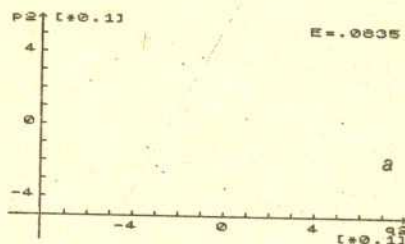
Rysunek 2 przedstawia ciąg trzech kolejnych ujęć migawkowych, pokazujących, jak powstaje zbiór punktów utworzonych przez przecięcie jednej trajektorii fazowej w przestrzeni trójwymiarowej (q_1, q_2, \dot{q}_2) z płaszczyzną $(0, q_2, \dot{q}_2)$, przy założeniu, iż w tych punktach prędkość $\dot{q}_1 > 0$. Tego typu konstrukcja (patrz rysunek 4) nosi już dzisiaj nazwę mapy Hénona - Heilesa i takiej też nazwy będziemy odtąd używać. Punkty układają się na regularnej krzywej, chociaż zarówno ich zgęszczenia, jak też kolejność pojawiania się mają nieco chaotyczny charakter. Inną tego typu mapę przedstawiono przykładowo na rysunku 3.



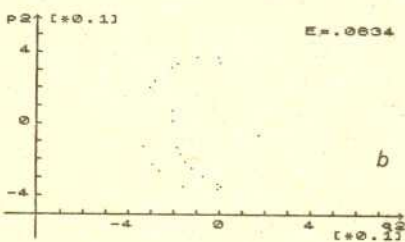
```

PROGRAM
  DIMENSION
  1000000
  2000000
  3000000
  4000000
  5000000
  6000000
  7000000
  8000000
  9000000
  10000000
  11000000
  12000000
  13000000
  14000000
  15000000
  16000000
  17000000
  18000000
  19000000
  20000000
  21000000
  22000000
  23000000
  24000000
  25000000
  26000000
  27000000
  28000000
  29000000
  30000000
  31000000
  32000000
  33000000
  34000000
  35000000
  36000000
  37000000
  38000000
  39000000
  40000000
  41000000
  42000000
  43000000
  44000000
  45000000
  46000000
  47000000
  48000000
  49000000
  50000000
  51000000
  52000000
  53000000
  54000000
  55000000
  56000000
  57000000
  58000000
  59000000
  60000000
  61000000
  62000000
  63000000
  64000000
  65000000
  66000000
  67000000
  68000000
  69000000
  70000000
  71000000
  72000000
  73000000
  74000000
  75000000
  76000000
  77000000
  78000000
  79000000
  80000000
  81000000
  82000000
  83000000
  84000000
  85000000
  86000000
  87000000
  88000000
  89000000
  90000000
  91000000
  92000000
  93000000
  94000000
  95000000
  96000000
  97000000
  98000000
  99000000
  100000000
  END
  T = 0.078
  U = 0.055

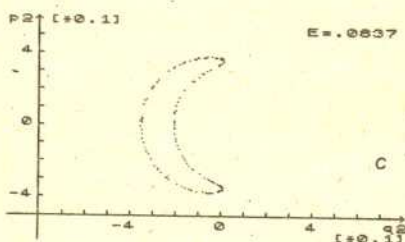
```



a



b



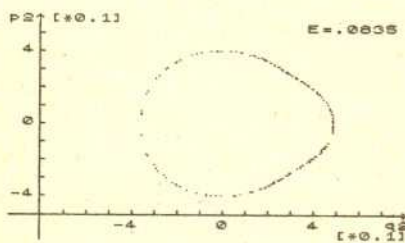
c

Rys.2

```

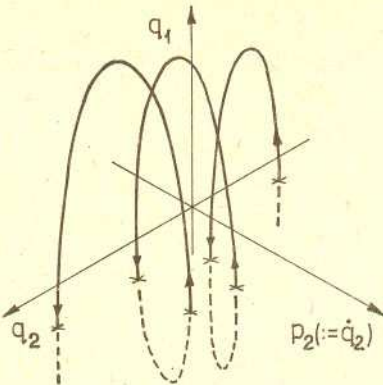
PROGRAM
  DIMENSION
  1000000
  2000000
  3000000
  4000000
  5000000
  6000000
  7000000
  8000000
  9000000
  10000000
  11000000
  12000000
  13000000
  14000000
  15000000
  16000000
  17000000
  18000000
  19000000
  20000000
  21000000
  22000000
  23000000
  24000000
  25000000
  26000000
  27000000
  28000000
  29000000
  30000000
  31000000
  32000000
  33000000
  34000000
  35000000
  36000000
  37000000
  38000000
  39000000
  40000000
  41000000
  42000000
  43000000
  44000000
  45000000
  46000000
  47000000
  48000000
  49000000
  50000000
  51000000
  52000000
  53000000
  54000000
  55000000
  56000000
  57000000
  58000000
  59000000
  60000000
  61000000
  62000000
  63000000
  64000000
  65000000
  66000000
  67000000
  68000000
  69000000
  70000000
  71000000
  72000000
  73000000
  74000000
  75000000
  76000000
  77000000
  78000000
  79000000
  80000000
  81000000
  82000000
  83000000
  84000000
  85000000
  86000000
  87000000
  88000000
  89000000
  90000000
  91000000
  92000000
  93000000
  94000000
  95000000
  96000000
  97000000
  98000000
  99000000
  100000000
  END
  T = 0.0473
  U = 0.055

```

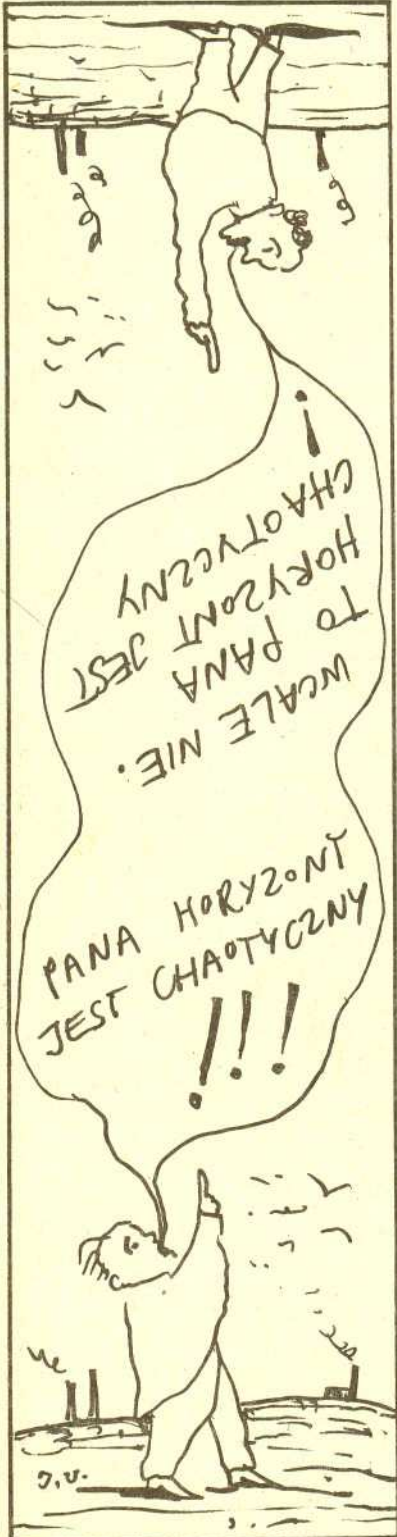


Rys.3

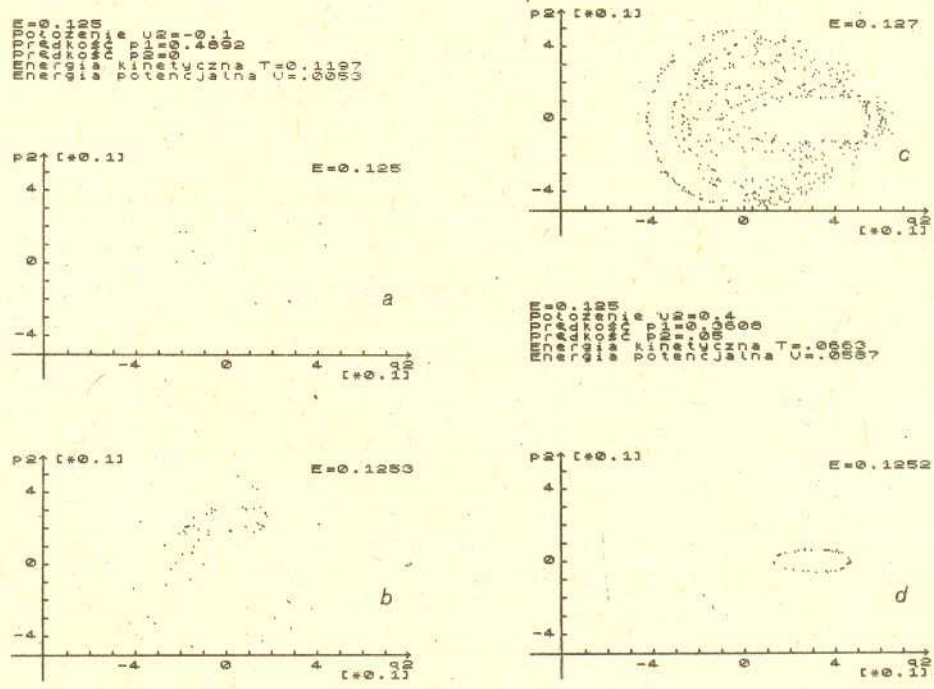
1. G. Contopoulos, *On the Existence of a Third Integral of the Motion*, Astr.J., tom 63, str.1 (1963).
2. M. Hénon i C. Heiles, *The Applicability of the Third Integral of Motion: Some Numerical Experiments*, Astr.J., tom 69, str.73 (1964).
3. G.H. Lunsford i J. Ford, *On the Stability of Periodic Orbits for Nonlinear Oscillator Systems in Regions Exhibiting Stochastic Behaviour*, J.Math.Phys., tom 13, str.700 (1972).



Rys.4. Definicja mapy Hénona - Heilesa jako zbioru punktów π_j ($j = 1, 2, 3, 4, \dots$), dla których $q_1 = 0$ oraz $q_1 > 0$. (Nie jest to całkiem ścisła definicja, bowiem wymaga jeszcze zdefiniowania przekształcenia transformującego dowolny punkt π_j w następny π_{j+1} . Można by je tutaj wprowadzić, wymagałoby to jednak całego szeregu wyjaśnień. Wprowadzimy je dopiero w jednym z następnych artykułów z tego cyklu (przy okazji omawiania problemu bifurkacji).



Spróbujcie pobawić się załączonym programem poszukując coraz to innych map Hénona - Heilesa, w szczególności odtworzyć dziwne rezultaty przedstawione na rysunku 4, które stanowią centralny punkt niniejszych rozważań. Na czym więc polega znaczenie tych rezultatów ?



Rys.5

Otóż, powyżej pewnej energii progowej pojawiają się orbity chaotyczne (zwane też stochastycznymi lub ergodycznymi). Jak widać na rysunku 5, mapa Hénona - Heilesa takich orbit składa się ze zbioru (niemal) chaotycznie rozrzuconych punktów. Rysunki 5a, 5b i 5c obrazują powstawanie orbity chaotycznej. Na tych rysunkach widać również i białe plamy. Tam mogą być następne orbity. Jedną z nich pokazuje przykładowo rysunek 5d. Nie ma ona charakteru chaotycznego. Spróbujcie sami zbadać pozostałe „podejrzane” miejsca. A może przeprowadzicie eksperymenty komputerowe dla większych wartości energii ? Zwróćcie uwagę, że wtedy obszary chaotyczne zwiększają się kosztem zajętych przez orbity regularne.

Przedstawione tutaj rezultaty zadomowiły się już na dobre w fizyce, dając impuls do nowego spojrzenia na zagadnienia związane z chaosem. Pragnę w zakończeniu podkreślić, że w szkole, jak też na studiach, uczy się ze zrozumiałych względów przede wszystkim rozwiązywalnej (całkowalnej) mechaniki klasycznej, prawie zapominając o tych zagadnieniach, które nie mają prostych rozwiązań. Innymi słowy, nie dyskutuje się olbrzymiej mnogości problemów niecałkowalnych. A przecież masowa już dzisiaj obecność komputerów otwiera przed nami unikalną możliwość analizowania, np. na drodze symulacji komputerowych, właśnie problemów niecałkowalnych. Artykuły z tego cyklu mają, między innymi, za zadanie przybliżyć Wam tę filozofię. Myślę, nie będąc chyba odosobniony, że rola eksperymentów komputerowych we wspomaganiu badań nad układami niecałkowalnymi będzie systematycznie rosła.