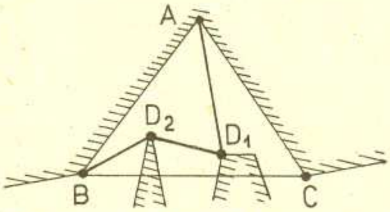
Rozwiązanie zadania M 532.
Co najmniej jeden z kątów wielokąta jest wypukły. Gdyby bowiem wszystkie kąty były wklęsłe, dopełnienie wielokąta byłoby też wielokątem, a to jest niemożliwe: wielokąt jest zbiorem ograniczonym.



Niech teraz kąt BAC będzie wypukły. Jeśli przekątna BC nie leży we wnętrzu wielokąta, to pewien wierzchołek (na rysunku oznaczony D_1) leży w trójkącie domkniętym ABC. Jeśli z kolei przekątna BD_1 nie leży we wnętrzu wielokąta, to istnieje wierzchołek $D_2 \neq D_1$ należący do trójkąta domkniętego ABD_1. Ponieważ jest tylko skończenie wiele wierzchołków, postępując w ten sposób dojdziemy w końcu do przekątnej BD_n, leżącej we wnętrzu wielokąta.

Rozwiązanie zadania F 262.
Na soczewkę i jednocześnie na kulkę pada promieniowanie, którego moc wynosi

$$P = \beta\frac{\pi D^2}{4},$$

gdzie D jest średnicą soczewki. Promień kulki jest równy promieniowi obrazu tarczy słonecznej, który wynosi $r = \alpha F/2$; F oznacza ogniskową soczewki. Kulka nie tylko pochłania padające promieniowanie, ale też sama je wypromieniowuje. Zgodnie z prawem Stefana–Boltzmanna wypromieniowana moc wynosi

$$P' = \sigma T^4 \cdot 4\pi \cdot \frac{\alpha^2 F^2}{4},$$

gdzie $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$ jest stałą Stefana – Boltzmanna. Poszukiwaną temperaturę znajdziemy z bilansu energii padającej i wypromieniowanej

$$\frac{\beta\pi D^2}{4} = \sigma T^4 4\pi \frac{\alpha^2 F^2}{4}.$$

Skąd

$$T = \sqrt[4]{\frac{\beta}{4\sigma\alpha}\left(\frac{D}{F}\right)^2} \approx 1,7 \cdot 10^3\ \mathrm{K}.$$

Rozwiązanie zadania M 533.
Wynika to z zadania 532. Podamy jednak inny dowód.
Proste, zawierające boki wielokąta, dzielą płaszczyznę na obszary wypukłe (każdy z nich jest częścią wspólną półpłaszczyzn). Każdy z nich leży albo całkowicie wewnątrz, albo na zewnątrz wielokąta. Obszary leżące wewnątrz dają w sumie cały wielokąt, a same są wielokątami wypukłymi, które można bez trudu podzielić na trójkąty.

Co to jest liczba rzeczywista ?

Dr hab. Marek KORDOS

Pierwszy artykuł pierwszego numeru *Delty* to *Czy liczby rzeczywiste są naprawdę rzeczywiste ?* Romana Sikorskiego. Można się z niego dowiedzieć bardzo wiele o liczbach rzeczywistych, ale gdyby szukać tam odpowiedzi na pytanie, co to takiego te liczby, to okaże się, że liczbami rzeczywistymi są obiekty spełniające aksjomatykę Richarda Dedekinda. To, oczywiście, prawda, ale trudno sobie wyobrazić, że przez ponad dwa tysiące lat uprawiania matematyki do czasów Dedekinda liczba rzeczywista była pojęciem mętnym i wszystko, co o niej wiedziano, było tylko intuicyjne.

Dirk J. Struik w *Krótkim zarysie historii matematyki* pisze, że Dedekind dokończył tylko pracę Eudoksosa. Spróbujmy więc zapoznać się z tym, co zrobił Eudoksos. Dokonanie, o którym pisze Struik, jest znane jako *Eudoksosa teoria proporcji*. Można się zdziwić: cóż ciekawego może być w teorii proporcji – przecież wszystko da się wyprowadzić ze znanego już czwartoklasistom prawa, że „iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych". Ale taki pogląd jest słuszny tylko przy założeniu, że mamy do czynienia z proporcją liczb rzeczywistych. Tymczasem Eudoksos takimi liczbami nie dysponował. Co więcej, właśnie jego teoria proporcji wprowadziła to pojęcie do matematyki, a za jej pośrednictwem do przyrodoznawstwa. Zacznijmy więc od początku.

Jest powszechnie wiadome, że pitagorejczycy twierdzili, iż wszystko jest liczbą. Wiadomo też, że ich osiągnięcia dotyczyły głównie geometrii, a nie liczb. Te dwie informacje nie są sprzeczne – liczby wydawały się pitagorejczykom dlatego ważniejsze, że były mniej zrozumiałe. I, jak każdy taki obiekt, dawały pożywkę nie tylko intelektowi, lecz także mistycyzmowi. Stąd np. najważniejszymi liczbami były 1, 2, 3 i 4. Powód stanowiło stwierdzenie, że jeden punkt wyznacza miejsce, dwa punkty – prostą, trzy – płaszczyznę, a cztery – przestrzeń. Nie byłoby to jeszcze specjalnie mistyczne, gdyby nie uzyskiwane stąd wnioski (co chyba lepiej byłoby napisać w cudzysłowie). Pierwszy nie jest jeszcze tak bardzo naciągany: dlatego liczyć należy w systemie dziesiątkowym (bo 10 to suma najważniejszych liczb). Drugi wniosek jest już bardzo wątpliwej natury: istnieje pod Ziemią zupełnie do niej podobny obiekt Antichton – powód stanowi zliczenie „wszystkich" obiektów kosmicznych. Więc zliczmy: Ziemia, Słońce, Księżyc, sfera niebieska gwiazd stałych, Merkury, Wenus, Mars, Jowisz i Saturn – wyraźnie widać, że jednego brakuje. I, proszę pamiętać, wszystko to pochodzi od naprawdę wybitnych myślicieli. Gdyby ktoś chciał takich ciekawostek więcej, niech poszuka informacji o liczbach trójkątnych, pięciokątnych, piramidalnych itp. Zestawienie tego z naprawdę godną podziwu wiedzą geometryczną pitagorejczyków zaskakuje.

Oczywiście, istniał związek między ich medytacjami arytmetycznymi i geometrycznymi (jak zresztą i dwiema jeszcze godnymi medytacji dyscyplinami – astronomią i muzyką). Liczbę w geometrii reprezentował odcinek (pomysł naturalny – my dzisiaj robimy podobnie posługując się osią liczbową). Wyniknęły zresztą z tego niepokonalne dla pitagorejczyków kłopoty – odcinki mogą być niewspółmierne, a to nie powinno mieć, ich zdaniem, miejsca. Gdyby jednak kłopot polegał tylko na tym, pewnie w końcu jakoś by sobie z tym poradzono. Drugi kłopot był poważniejszy. Chodziło o to, jak związać z liczbami inne pojęcia geometryczne (np. pole, objętość, rozwartość kąta) czy fizyczne (np. ciężar), dla których nie istnieje sensownie określony, odpowiadający im odcinek. Tę właśnie trudność pokonał uczeń Platona – Eudoksos.

Proporcje, o których mówi jego teoria, nie są relacjami między liczbami – w początku czwartego stulecia p.n.e., z podanych wyżej powodów wolano o nich nie mówić (radykaliści głosili nawet, że liczby należy zostawić kupczykom, że są one niegodne zainteresowania filozofów). Eudoksos określa proporcję dowolnych wielkości. Podaje mianowicie ścisłą definicję sytuacji, gdy dwie wielkości jakiegoś rodzaju tworzą, reprezentują tę samą proporcję co dwie wielkości innego rodzaju. Definicja ta jest następująca:

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta},$$

gdy dla dowolnych liczb naturalnych m i n prawdą jest, że

$$\text{jeśli } mA < nB, \text{ to } m\alpha < n\beta,$$
$$\text{jeśli } mA = nB, \text{ to } m\alpha = n\beta,$$
$$\text{jeśli } mA > nB, \text{ to } m\alpha > n\beta.$$

Jak widać, do stwierdzenia, czy wielkości A i B tworzą tę samą proporcję co wielkości α i β, wystarcza porównywanie wielokrotności wielkości tego samego rodzaju. Można np. wziąć jako A i B jakieś bryły, jako zaś α i β jakieś kąty i do stwierdzenia, czy tworzą one jednakowe proporcje, nie będzie trzeba porównywać brył z kątami.

Równe proporcje tworzą, według Eudoksosa, liczbę. Jeżeli jako wielkość znajdującą się (mówiąc dzisiejszym językiem) w mianowniku weźmiemy uznaną przez nas za jednostkową wielkość danego rodzaju (w powyższych przykładach np. sześcian o krawędzi 1 i kąt prosty), to tym samym przyporządkujemy wielkości znajdującej się w liczniku liczbę – właśnie proporcję. Tym sposobem obok formalnej, podanej wyżej definicji liczby (będę już pisał *rzeczywistej*, bo tak liczby Eudoksosa później nazwano), mamy jej nieformalne, ale bardzo przejrzyste określenie – liczba rzeczywista to każdy możliwy wynik mierzenia. Okazało się, że wszystkie wielkości, które można mierzyć, mierzy się tymi samymi liczbami. Fakt dla nas tak oczywisty, że aż niedostrzegalny. Ale proszę sobie wyobrazić przyrodoznawstwo bez tego udogodnienia.

Jeszcze jedna interesująca własność definicji Eudoksosa. Jak łatwo zauważyć, dwie proporcje, dwie liczby rzeczywiste są równe, gdy mają dokładnie takie same przybliżenia wymierne (faktycznie łatwo zauważyć, które $\frac{n}{m}$ przybliżają proporcję z dołu, a które z góry i że obie proporcje są przybliżane tak samo). Utożsamienie liczby rzeczywistej ze zbiorami jej dolnych i górnych przybliżeń jest rozwiązaniem, które nie tylko rozwiązuje kłopoty pitagorejczyków z niewspółmiernością (czyli niewymiernością), lecz także odpowiada praktyce mierzenia (każdy bowiem wynik pomiaru jest z konieczności liczbą wymierną).

Wyniki Eudoksosa umożliwiły znaczny postęp w badaniach matematycznych. Tego zdania są np. Euklides i Archimedes, którzy w swoich pracach chwalą te rezultaty i nieustannie z nich korzystają (dla chronologii – Euklides był młodszym kolegą Eudoksosa z Akademii Platońskiej, Archimedes był kilkadziesiąt lat młodszy i, oczywiście, ich nie znał). Wydaje się, że takim autorytetom można uwierzyć.

Czy rzeczywiście Eudoksos zrobił wszystko, a Dedekind resztę ? Jest to już sprawa, w której każdy może mieć własną opinię. Warto może jeszcze dodać, że wykazanie, iż proporcje spełniają (mówiąc dzisiejszym językiem) aksjomaty ciała, można znaleźć w *Elementach* Euklidesa, księga piąta.

Jeśli przyjmuje się liczby rzeczywiste za możliwe wyniki mierzenia, to powstaje pytanie – jak mierzyć. Eudoksos i tu zaproponował sposób – nazwano go metodą wyczerpywania. Tę z kolei pracę Eudoksosa „dokończył” Lebesgue, ale o tym innym razem.

Rozwiązanie zadania F 268.
Średnica plamki w ognisku jest rzędu

$$\frac{\lambda}{D}F = \lambda.$$

Przyspieszenie elektronu spowodowane jest składową elektryczną (polem elektrycznym E) promieniowania lasera. Końcową prędkość, jaką powinien osiągnąć elektron, aby jego energia kinetyczna wynosiła $\approx m_0c^2$, otrzymamy z:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2m_0c^2,$$

skąd

$$\beta^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{3}{4},$$

gdzie c jest prędkością światła. Tak więc średnia prędkość elektronu powinna być bliska $v = c/2$. Ponieważ przyspieszenie zachodzi w czasie około $T/4$ (T jest okresem drgań pola elektrycznego), więc przebyta przez elektron droga jest równa około $\frac{c}{2}\cdot\frac{T}{4} = \frac{\lambda}{8}$, co jest mniejsze od rozmiaru ogniska. Oszacujemy teraz wielkość przyspieszającego pola E:

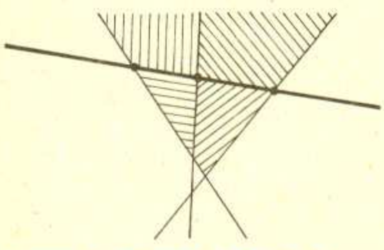
$$\frac{4c}{T} = \frac{4c^2}{\lambda} \approx \frac{eE}{m_0},$$

$$E \approx \frac{4m_0c^2}{\lambda e}.$$

Stąd potrzebna moc lasera wyniesie

$$P \approx (\varepsilon_0E^2)c\lambda^2 \approx \frac{16\varepsilon_0m_0^2c^5}{e^2} \approx 10^{10}\ \mathrm{W}.$$

Rozwiązanie zadania M 534.
Dla $n = 1$ nie ma obszarów ograniczonych.
Załóżmy teraz, że dla k prostych jest nie więcej niż $\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$ obszarów ograniczonych. Następna, $(k+1)$-sza prosta daje co najwyżej $k-1$ nowych obszarów ograniczonych: jest nie więcej niż k punktów przecięcia z pozostałymi prostymi, czyli nie więcej niż $k-1$ odcinków, które mogą być brzegami obszarów ograniczonych.



W sumie dostajemy nie więcej niż
$\frac{1}{2}(k-1)(k-2) + (k-1) =$
$= (k-1)\left(\frac{1}{2}(k-2)+1\right) =$
$= \frac{1}{2}k(k-1)$ obszarów ograniczonych dla $k+1$ prostych. To kończy dowód.
Uwaga. Można wykazać, że dla każdego $n \geq 1$ istnieje n prostych, które dają $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ obszarów ograniczonych.