# Ciąg $(\sin n)^n$ albo o aproksymacjach diofantycznych

*Mgr Sławomir CYNK*

Kilka lat temu dużą popularnością wśród studentów matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego cieszył się następujący problem z analizy matematycznej:

Czy zbieżny jest ciąg $a_n := (\sin n)^n$ ?

Ufundowano nawet nagrodę za jego rozstrzygnięcie.

Wyrazy ciągu $a_n$ o numerach parzystych są dodatnie, więc ciąg ten nie może być zbieżny do liczby ujemnej. Równie łatwo możemy wykazać, że badany ciąg nie ma granicy dodatniej. Przypuśćmy bowiem, że $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, gdzie $c$ jest liczbą dodatnią. Wtedy otrzymalibyśmy $\lim_{n\to\infty} \sin n = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = c^0 = 1$, co, oczywiście, nie jest prawdą.

W ten sposób w naszym śledztwie pozostała niesprawdzona tylko jedna podejrzana – liczba zero. Zanim wykluczymy i ją (a więc w konsekwencji wykażemy, że ciąg $a_n$ nie jest zbieżny), przypomnijmy-przedstawmy kilka faktów. Wszystkie one wiążą się z przybliżaniem liczb niewymiernych liczbami wymiernymi, czyli tak zwanymi aproksymacjami diofantycznymi.

Niech $x$ będzie liczbą rzeczywistą niewymierną. Liczbę wymierną $p/q$ nazywamy **najlepszym przybliżeniem** liczby $x$, jeśli dla dowolnej liczby naturalnej $r \le q$ oraz dowolnej liczby całkowitej $s$ prawdziwa jest nierówność $|qx - p| \le |rx - s|$ (innymi słowy, jest to takie przybliżenie liczby $x$ za pomocą liczby wymiernej, że biorąc dowolne inne przybliżenie za pomocą liczby wymiernej o mianowniku nie przekraczającym $q$ popełnimy większy błąd względny w stosunku do mianownika).

W dalszym ciągu posłużymy się następującymi własnościami najlepszych przybliżeń (które uzasadnimy później):

1. Dwa różne najlepsze przybliżenia tej samej liczby niewymiernej mają różne mianowniki.
2. Najlepsze przybliżenie jest zawsze ułamkiem nieskracalnym.
3. Jeśli liczba wymierna $p/q$ jest najlepszym przybliżeniem liczby wymiernej $x$, to spełniona jest nierówność
$$|qx - p| \le 1/q .$$
4. Jeśli $p_n/q_n$ jest ciągiem różnych najlepszych przybliżeń liczby $x$, to $\lim_{n\to\infty} (p_n/q_n) = x$.
5. Każda liczba niewymierna ma nieskończenie wiele najlepszych przybliżeń, których mianowniki są liczbami nieparzystymi.

Korzystając z wypisanych faktów udowodnimy, że liczba zero nie jest granicą ciągu $a_n$. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Niech ciąg $p_n/q_n$ będzie nieskończonym ciągiem różnych najlepszych przybliżeń liczby $\pi/2$ o mianownikach nieparzystych. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}|\cos p_n| &= |\sin(\pi/2 - p_n)| = \\ &= \Big|\sin\Big(\big(\pi/2 - p_n\big) + \big((q_n-1)/2\big)\pi\Big)\Big| = \\ &= |\sin(q_n\pi/2 - p_n)| .\end{aligned}$$

Ale dla dowolnej liczby rzeczywistej $t$ mamy $|\sin t| \le |t|$, więc w konsekwencji

$$|\cos p_n| = |\sin(q_n\pi/2 - p_n)| \le |q_n\pi/2 - p_n| \le 1/q_n ,$$

a stąd

$$|\sin p_n| = \sqrt{1 - (\cos p_n)^2} \ge 1 - |\cos p_n| \ge 1 - 1/q_n .$$

Ciąg $q_n$ składa się z różnych liczb naturalnych, więc $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$, a ponieważ ciąg $p_n/q_n$ jest zbieżny do $\pi/2$, więc również $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$. Na mocy założenia $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, mamy zatem $\lim_{n\to\infty} (\sin p_n)^{p_n} = 0$. Z drugiej strony

$$\lim_{n\to\infty} (\sin p_n)^{p_n} \ge \lim_{n\to\infty} \Big(\big(1 - (1/q_n)\big)^{q_n}\Big)^{p_n/q_n} = e^{-\pi/2} > 0 .$$

W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność kończącą dowód, że ciąg $a_n$ nie jest zbieżny.

Pozostały nam jeszcze do udowodnienia wypisane własności najlepszych przybliżeń. Pierwsze dwie z nich są na tyle proste, że ich dowód pozostawimy starannemu Czytelnikowi. Własność trzecia jest wnioskiem z udowodnionego w 1842 roku przez Dirichleta twierdzenia nazywanego obecnie jego nazwiskiem.

**Twierdzenie Dirichleta.** Niech $x$ będzie liczbą niewymierną. Dla dowolnej liczby naturalnej $Q$ istnieją takie liczby całkowite $p$, $q$, że $1 \le q \le Q$ oraz

$$|xq - p| \le 1/Q.$$

**Dowód.** Rozważmy następujący układ $Q+1$ liczb $0, \{x\}, \{2x\}, \ldots, \{Qx\}$ (gdzie $\{t\}$ oznacza część ułamkową liczby $t$) z przedziału $[0, 1]$. Dwie spośród nich różnią się nie więcej niż o $1/Q$. Oznacza to, że istnieją takie liczby całkowite $r_1$, $r_2$, $s_1$, $s_2$, że $0 \le r_1 < r_2 \le Q$ oraz $|(r_1x - s_1) - (r_2x - s_2)| \le 1/Q$. Przyjmując $q = r_1 - r_2$, $p = s_1 - s_2$ otrzymamy tezę twierdzenia.

Własność czwarta jest wnioskiem z własności pierwszej i trzeciej. Dowód własności piątej składa się z dwóch części. Najpierw zauważmy, że dowolna liczba niewymierna ma nieskończenie wiele najlepszych przybliżeń. Załóżmy, że jest przeciwnie. Przypuśćmy, że $p/q$ jest najlepszym przybliżeniem liczby $x$ o największym mianowniku. Wtedy dla dowolnej liczby wymiernej $s/r$ mamy $|rx - s| \ge |qx - p|$. Liczba $x$ jest niewymierna, więc $|qx - p| > 0$, a zatem istnieje taka liczba naturalna $Q$, że $|qx - p| > 1/Q$. Ale w ten sposób dowiedliśmy, że dla dowolnej liczby wymiernej $s/r$ zachodzi $|rx - s| > 1/Q$, czyli otrzymaliśmy sprzeczność z twierdzeniem Dirichleta. W ten sposób wykazaliśmy, że istnieje nieskończenie wiele najlepszych przybliżeń liczby $x$. Ustawmy je w kolejności rosnących mianowników. Wykażemy, że spośród dowolnych dwóch wyrazów uzyskanego ciągu przynajmniej jeden ma mianownik nieparzysty. Przypuśćmy, że jest przeciwnie – niech liczby $(2p+1)/2q$ i $(2s+1)/2r$ będą kolejnymi najlepszymi przybliżeniami liczby $x$. Ale wtedy liczba $(p+s+1)/(q+r)$ jest „lepszym przybliżeniem" liczby $x$ niż $(2p+1)/2q$, czyli istnieje najlepsze przybliżenie $x$ o mianowniku większym niż $2q$, a mniejszym niż $2r$. Otrzymana sprzeczność kończy dowód własności piątej, a w konsekwencji również dowód rozbieżności ciągu $a_n$.

Na zakończenie zauważmy, że rozwiązaliśmy problem z analizy matematycznej korzystając z pewnych prostych faktów z teorii liczb.