# Siedemnastokąt foremny

## Dr Maciej BRYŃSKI

Wykonywanie konstrukcji cyrklem i linijką należy już od czasów starożytnych do zadań ulubionych przez matematyków. Bez trudu potrafimy skonstruować trójkąt równoboczny, kwadrat albo sześciokąt foremny. A jak to jest z innymi wielokątami foremnymi ? Okazuje się, że nie każdy taki wielokąt można skonstruować; dokładniej wyjaśnimy to w dalszym ciągu. Problem ten rozstrzygnął nie byle kto, lecz największy matematyk wszechczasów – Carl Friedrich Gauss. W roku 1796 dziewiętnastoletni Gauss podał konstrukcję siedemnastokąta foremnego, a raczej przytoczył dowód tego, że konstrukcję taką można wykonać. Prześledźmy to rozumowanie.

Przyjmiemy, że siedemnastokąt, który chcemy skonstruować, będzie wpisany w koło o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych oraz jeden z jego wierzchołków będzie punktem $A = (1, 0)$. Pozostałe wierzchołki leżą na okręgu, dzieląc go na 17 równych łuków. Utożsamiając punkt $(x, y)$ z liczbą zespoloną $x + iy$ utożsamiamy wierzchołki tego 17-kąta z liczbami

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{17} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{17}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 16,$$

tj. pierwiastkami stopnia 17 z jedynki. Wynika to stąd, że pierwiastki stopnia 17 z jedynki mają moduł równy 1, ich argumentami zaś są kolejne wielokrotności kąta $\frac{2\pi}{17}$, a zatem punkty płaszczyzny reprezentujące te liczby zespolone leżą na okręgu o promieniu 1 i środku $(0, 0)$ dzieląc ten okrąg na 17 równych łuków.

Siedemnaście liczb $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{16}$ stanowi grupę względem mnożenia; istotnie – iloczyn dwóch spośród tych liczb jest znów jedną z nich

$$\varepsilon_k \cdot \varepsilon_m = \left(\cos\frac{2k\pi}{17} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{17}\right)\cdot\left(\cos\frac{2m\pi}{17} + \mathrm{i}\sin\frac{2m\pi}{17}\right) = \\ = \left(\cos\frac{2(k+m)\pi}{17} + \mathrm{i}\sin\frac{2(k+m)\pi}{17}\right) = \varepsilon_{k+m}$$

(gdy $k + m \geq 17$, to zastępujemy tę liczbę resztą z podzielenia przez 17), – odwrotność liczby $\varepsilon_k$ jest liczbą $\varepsilon_{17-k}$ (odwrotnością liczby $\varepsilon_0$ jest $\varepsilon_0$).

Aby udowodnić wykonalność konstrukcji siedemnastokąta foremnego, Gauss przeprowadził następujące rozumowanie.

W grupie pierwiastków stopnia siedemnastego z 1 uporządkujmy elementy $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_{16}$ w następujący sposób: liczbie $\varepsilon_k$ przyporządkowujemy nowy numer $l$, jeżeli liczba $3^l$ daje przy dzieleniu przez 17 resztę $k$. W poniższej tabelce w górnym wierszu zestawiono nowe, a w dolnym wierszu stare numery pierwiastków.

| $l$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | 1 | 3 | 9 | 10 | 13 | 5 | 15 | 11 | 16 | 14 | 8 | 7 | 4 | 12 | 2 | 6 |

Będziemy pisać $\varepsilon_{[l]}$ na oznaczenie pierwiastka, którego nowy numer jest $l$. Oznaczymy przez $\sigma_{m,r}$ sumę tych $\varepsilon_{[l]}$, których numery $l$ przy dzieleniu przez $m$ dają resztę $r$.

Rozważmy najpierw

$$\sigma_{2,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[4]} + \ldots + \varepsilon_{[14]};$$

$$\sigma_{2,1} = \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[5]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}.$$

Udowodnimy, że liczby $\sigma_{2,0}$ i $\sigma_{2,1}$ są pierwiastkami pewnego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych; wyniknie stąd, że liczby te potrafimy skonstruować.

Weźmy pod uwagę sumy liczb $\sigma_{2,0}$ i $\sigma_{2,1}$. Jest to suma wszystkich pierwiastków stopnia 17 z 1, z wyjątkiem liczby $\varepsilon_0 = 1$. Ale przecież

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{16} = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3 + \ldots + \varepsilon_1^{16} = \frac{1-\varepsilon_1^{17}}{1-\varepsilon_1} = \frac{1-1}{1-\varepsilon_1} = 0.$$

Zatem

$$(*) \qquad \sigma_{2,0} + \sigma_{2,1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{16} = -1.$$

Rozważmy teraz iloczyn $\sigma_{2,0} \cdot \sigma_{2,1}$. Jest on równy sumie 64 składników $\varepsilon_{[k]} \cdot \varepsilon_{[m]}$, gdzie $k$ jest liczbą parzystą, $m$ – nieparzystą.

# FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

## PÓŁPRZEWODNIKI NISKOWYMIAROWE

W sierpniu 1988 roku odbyło się w Pałacu Kultury i Nauki spotkanie fizyków z całego świata zajmujących się problematyką półprzewodników. Konferencja ta, już dziewiętnasta z kolei, została zorganizowana w Warszawie po raz wtóry (poprzednio w 1972 roku). Udział w obradach brało około 800 uczestników z ponad trzydziestu krajów, a wśród nich dwóch laureatów nagrody Nobla: Leo Esaki pracujący w laboratoriach firmy IBM w Yorktown Heights w stanie Nowy Jork (USA) oraz Klaus von Klitzing z Instytutu imienia Maxa Plancka w Stuttgarcie (RFN). Bardzo duża część obrad konferencji była poświęcona własnościom fizycznym półprzewodnikowych struktur dwuwymiarowych. Obu noblistom program i przebieg konferencji musiał przynieść wiele satysfakcji. Wszakże to Esaki w 1970 roku zaproponował wytwarzanie supersieci — niezwykłych "kanapek" zbudowanych z warstw różnych półprzewodników. Natomiast w 1972 roku w Warszawie Esaki prezentował już pierwsze własności supersieci GaAs—GaAlAs otrzymanych w IBM. Z kolei von Klitzing odkrył w 1980 roku najciekawszą własność dwuwymiarowych struktur półprzewodnikowych — kwantowy efekt Halla. Zmniejszanie się liczby wymiarów w świecie półprzewodników wcale się na tym nie skończyło. Począwszy od 1982 roku zaczęto wytwarzać jednowymiarowe struktury półprzewodnikowe w postaci wąskich ścieżek o szerokości rzędu 100 nm. Z kolei w czasie konferencji 1988 roku grupa Esakiego przedstawiła bardzo interesujące własności nie tylko struktur jednowymiarowych, ale i zerowymiarowych (punktowych) otrzymywanych poprzez selektywne trawienie warstw dwuwymiarowych. Inny rodzaj obiektów zerowymiarowych zaprezentowali w Warszawie fizycy radzieccy z Leningradu. Badali oni własności optyczne mikrokryształów półprzewodników umieszczonych w przezroczystej matrycy szklanej. Owe "okruszki" półprzewodnikowe dochodziły do rozmiarów rzędu pojedynczych nanometrów. Wszystkie rodzaje tworów dwu—, jedno— i zerowymiarowych stanowią "studnie kwantowe" ograniczające możliwość poruszania się elektronów, które normalnie swobodnie wędrują po krysztale. Co więcej, elektron w krysztale może mieć bardzo małą masę efektywną $m^*$, rzędu ułamka masy swobodnego elektronu w próżni. W połączeniu z dużą stałą dielektryczną półprzewodników daje to istotne rozmycie funkcji falowej takiego elektronu, nawet do wartości rzędu 10 nm. Taki "nadmuchany" elektron musi się jednak zmieścić w warstwie, wąskiej ścieżce czy nawet tworze zerowymiarowym. Jak łatwo się domyślić, powoduje to istotne zaburzenia widma energii stanów elektronowych. Zarówno rachunki teoretyczne, jak i badania eksperymentalne tych stanów nie są jeszcze zakończone i świat fizyki "niskowymiarowej" może kryć jeszcze wiele niespodzianek.

Pokażemy niżej, że wśród tych 64 składników każdy z pierwiastków $\varepsilon_{[0]}, \varepsilon_{[1]}, \ldots, \varepsilon_{[15]}$ występuje dokładnie 4 razy. Otrzymamy stąd

$$(**)\qquad \sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1} = 4(\varepsilon_{[0]}+\varepsilon_{[1]}+\ldots+\varepsilon_{[15]}) = 4(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_{16}) = 4\cdot(-1) = -4\,.$$

Czytelnik zechce uzasadnić,że każdy składnik $\varepsilon_{[k]}\cdot\varepsilon_{[m]}$ można przedstawić w postaci $\varepsilon_{[p]}\cdot\varepsilon_{[p+r]}$, gdzie $0 \le p \le 15$, $r = 1,3,5,7$.

Zastosujemy teraz przekształcenia $T_k$ $(k = 1,2,\ldots,16)$ przyporządkowujące pierwiastkowi $\varepsilon_j$ jego $k$-tą potęgę $\varepsilon_j^k$. Każde z tych przekształceń odwzorowuje zbiór pierwiastków $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{16}\}$ na ten sam zbiór. Jest przy tym $T_k\cdot T_l = T_{kl}$ i przekształcenia $T_k$ $(k = 1,2,\ldots,16)$ stanowią grupę względem składania. Podobnie, jak przy numerowaniu pierwiastków, przyjmiemy i tu nowe numery: $T_k = T_{[l]}$, jeśli $3^l$ daje resztę $k$ przy podzieleniu przez 17. Przy tej numeracji mamy

$$T_{[k]}\varepsilon_{[l]} = \varepsilon_{[k+l]}\,,$$
$$T_{[m]}(T_{[k]}\varepsilon_{[l]}) = T_{[m+k]}\varepsilon_{[l]}\,.$$

Wracając do sumy $\sum \varepsilon_{[k]}\cdot\varepsilon_{[m]} = \sum_{p=0}^{15}\sum_{r=1,3,5,7}\varepsilon_{[p]}\cdot\varepsilon_{[p+r]}$ pogrupujemy w niej składniki z ustalonym $r$:

$$\begin{aligned} S_r &= \varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]} + \varepsilon_{[1]}\varepsilon_{[1+r]} + \varepsilon_{[2]}\varepsilon_{[2+r]} + \ldots + \varepsilon_{[15]}\varepsilon_{[15+r]} = \\ &= T_{[0]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}) + T_{[1]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}) + \ldots + T_{[15]}(\varepsilon_{[0]}\varepsilon_{[r]}) = \\ &= T_{[0]}\varepsilon_{[r]} + T_{[1]}\varepsilon_{[r]} + \ldots + T_{[15]}\varepsilon_{[r]} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[1]} + \ldots + \varepsilon_{[15]} = -1\,. \end{aligned}$$

Ponieważ $r$ przyjmuje cztery wartości, więc

$$\sigma_{2,0}\cdot\sigma_{2,1} = S_1 + S_3 + S_5 + S_7 = -4\,.$$

Wobec $(*)$ i $(**)$ liczby $\sigma_{2,0}$ i $\sigma_{2,1}$ są pierwiastkami równania $x^2 + x - 4 = 0$. Punkty osi liczbowej odpowiadające tym pierwiastkom potrafimy, oczywiście, skonstruować. Rozważamy teraz

$$\begin{aligned} \sigma_{4,0} &= \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[4]} + \varepsilon_{[8]} + \varepsilon_{[12]}\,, \\ \sigma_{4,1} &= \varepsilon_{[1]} + \varepsilon_{[5]} + \varepsilon_{[9]} + \varepsilon_{[13]}\,, \\ \sigma_{4,2} &= \varepsilon_{[2]} + \varepsilon_{[6]} + \varepsilon_{[10]} + \varepsilon_{[14]}\,, \\ \sigma_{4,3} &= \varepsilon_{[3]} + \varepsilon_{[7]} + \varepsilon_{[11]} + \varepsilon_{[15]}\,, \end{aligned}$$

i analogicznie jak wyżej stwierdzamy, że

$$\sigma_{4,0} + \sigma_{4,2} = \sigma_{2,0}\,,\quad \sigma_{4,0}\cdot\sigma_{4,2} = -1\,.$$

Stąd wynika, że $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,2}$ są pierwiastkami równania $x^2 - \sigma_{2,0}x - 1 = 0$ i podobnie $\sigma_{4,1}$, $\sigma_{4,3}$ są pierwiastkami równania $x^2 - \sigma_{2,1}x - 1 = 0$. Punkty odpowiadające liczbom $\sigma_{4,0}$, $\sigma_{4,1}$, $\sigma_{4,2}$, $\sigma_{4,3}$ można skonstruować.

Rozważamy wreszcie

$$\sigma_{8,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[8]}\,,\quad \sigma_{8,4} = \varepsilon_{[4]} + \varepsilon_{[12]}$$

i otrzymujemy

$$\sigma_{8,0} + \sigma_{8,4} = \sigma_{4,0}\,,\quad \sigma_{8,0}\cdot\sigma_{8,4} = \sigma_{4,1}\,,$$

skąd wynika, że $\sigma_{8,0}$ i $\sigma_{8,4}$ są pierwiastkami równania $x^2 - \sigma_{4,0}x + \sigma_{4,1} = 0$, można więc te liczby skonstruować. Zauważmy, że $\sigma_{8,0} = \varepsilon_{[0]} + \varepsilon_{[8]} = \varepsilon_1 + \varepsilon_{16} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$, a mając tę liczbę skonstruujemy 17-kąt foremny. Wystarczy bowiem odłożyć na osi $OX$ liczbę $\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)$ i wystawić w otrzymanym punkcie prostopadłą do osi. Przecina ona okrąg jednostkowy w punktach odpowiadających liczbom $\varepsilon_1$ i $\varepsilon_{16}$. Odkładając odpowiedni łuk na okręgu otrzymamy kolejne wierzchołki siedemnastokąta. Przeprowadzając wskazane wyżej rachunki można stwierdzić, że

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16}\left(\sqrt{17} - 1 + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{170 + 38\sqrt{17}}}$$

Pomysł Gaussa przedstawiony w powyższej konstrukcji daje się zastosować do konstrukcji $p$-kąta foremnego dla każdej liczby pierwszej Fermata $p$, tj. liczby pierwszej postaci $p_n = 2^{2^n} + 1$. Dla $n = 0,1,2,3,4$ wzór ten daje istotnie liczby pierwsze 3, 5, 17, 257, 65537. Podstawiając w miejsce $n$ kilkanaście kolejnych liczb naturalnych otrzymujemy liczby złożone; nie wiadomo, czy w ciągu $(p_n)$ występuje choć jeszcze jedna liczba pierwsza oprócz wymienionych wyżej. Przytoczony tu dowód konstruowalności siedemnastokąta sam Gauss uważał za jedno z ważniejszych swych odkryć.

A co z innymi wielokątami foremnymi ? Okazuje się, że $n$-kąt foremny można skonstruować wtedy i tylko wtedy, gdy w rozkładzie liczby $n$ na czynniki pierwsze występuje pewna potęga dwójki (może być z wykładnikiem zero) oraz ewentualnie różne liczby pierwsze Fermata.

**Rozwiązanie zadania F 260.**
W czasie ruchu przewodzącej cieczy w polu magnetycznym w obwodzie powstaje siła elektromotoryczna indukcji $\varepsilon_{ind} = vBd$ (co można łatwo otrzymać rozpatrując działanie siły Lorentza na swobodny nośnik ładunku). Wobec tego w obwodzie płynie prąd

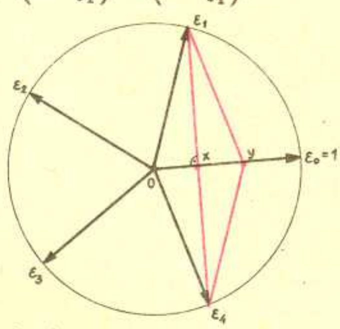
$$I = \frac{\varepsilon_{ind}}{r+R},\quad \text{gdzie}\quad r = \frac{d}{\lambda S}.$$

Stąd moc będzie równa

$$P = I^2R = \frac{\varepsilon_{ind}^2R}{(r+R)^2} = \frac{v^2B^2d^2R}{(d/(\lambda S)+R)^2}.$$

To samo dla pięciokąta:

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \\ &= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3 + \varepsilon_1^4 = \\ &= 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} + \frac{1}{\varepsilon_1} = \\ &= 1 + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) + \left(\varepsilon_1^2 + 2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2}\right) - 2 = \\ &= \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)^2 + \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) - 1 = 0\,. \end{aligned}$$




Rozwiązujemy równanie

$$y^2 + y - 1 = 0$$

i biorąc $x = \frac{1}{2}y$ konstruujemy pięciokąt.