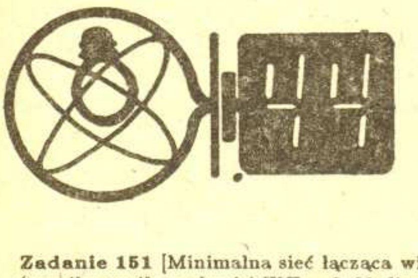
Regulamin

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs – ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44**.
2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).
3. Uczestnikiem ligi może być każdy.
4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przysyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.
5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.
6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1988 upływa 31 stycznia 1989). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.
7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci – roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.
8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.
9. Rozwiązanie każdego zadania jest ocenione w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie brana jest pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.
10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4 - 3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).
11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).
12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania – por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.
13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane – oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44**.
14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.
15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44**.
16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i dla fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.
17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.
18. Raz do roku, w numerze lutowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).
19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na coroczne spotkania **Klubu 44**.
20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.

Klub 44

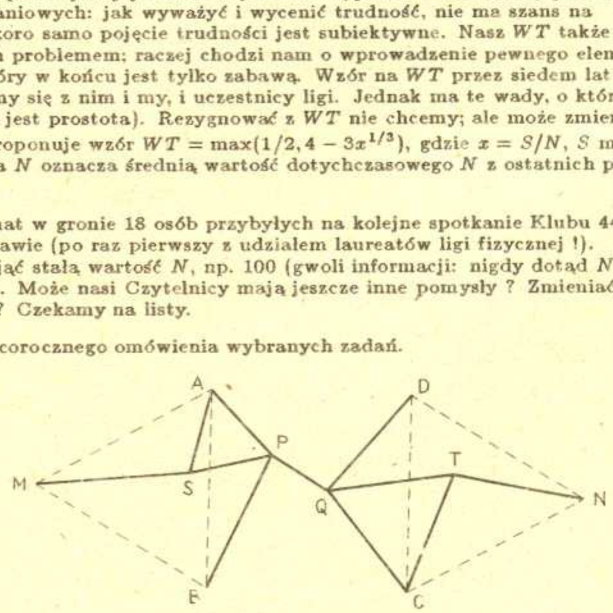


W tegorocznym omówieniu konkursu ligowego pragniemy zająć się określeniem współczynnika trudności (WT). Od dawna nasi Czytelnicy zwracają uwagę na zawarte w tym określeniu nielogiczności. Kilka miesięcy temu poruszył znów tę sprawę w liście pan mgr Henryk Kornacki z Augustowa, sygnalizując dwa zjawiska. Po pierwsze, funkcja $x \mapsto x(4-3x)$ nie jest monotoniczna w $\langle 0;1)$; tak więc niższa suma ocen za jakieś zadanie może – paradoksalnie – dać w efekcie większą sumę punktów. Po drugie, nasz WT rozróżnia trudność jedynie „relatywnie", w obrębie jednej dwuzadaniowej serii, nie odzwierciedla natomiast adekwatnie relacji między trudnością zadań z różnych serii, skoro zmienia się mianownik N. Nawiasem, gdy liga rozpoczynała swój żywot, w numerze były trzy zadania z matematyki, a nie dwa, różnicowanie było nieco bardziej treściwe. Dodajmy od siebie, że liniowa funkcja $x \mapsto 4-3x$ ma jeszcze jedną wadę: skala zagęszcza się w górnej części. Doświadczenie wykazuje, że liczbowo niezbyt znaczna różnica np. między 3,3 a 3,7 odpowiada dużej faktycznej różnicy w trudności, podczas gdy dla zadań łatwych wartości z przedziału $(1;2)$ przybierane są w sposób dość przypadkowy. Może więc lepsza byłaby jakaś funkcja ściśle wypukła ? Odwieczny problem wszystkich konkursów zadaniowych: jak wyważyć i wycenić trudność, nie ma szans na obiektywne rozwiązanie, skoro samo pojęcie trudności jest subiektywne. Nasz WT także nie dąży do uporania się z tym problemem; raczej chodzi nam o wprowadzenie pewnego elementu ubarwiającego konkurs, który w końcu jest tylko zabawą. Wzór na WT przez siedem lat jakoś funkcjonował, zżyliśmy się z nim i my, i uczestnicy ligi. Jednak ma te wady, o których wspominaliśmy (zaletą zaś jest prostota). Rezygnować z WT nie chcemy; ale może zmienić formułę ? Pan Kornacki proponuje wzór $WT = \max(1/2, 4 - 3x^{1/3})$, gdzie $x = S/N$, S ma znaczenie jak dotychczas, a N oznacza średnią wartość dotychczasowego N z ostatnich pięciu miesięcy.

Rozmawialiśmy na ten temat w gronie 18 osób przybyłych na kolejne spotkanie Klubu 44 we wrześniu 1988 w Warszawie (po raz pierwszy z udziałem laureatów ligi fizycznej !). Padła propozycja, by przyjąć stałą wartość N, np. 100 (gwoli informacji: nigdy dotąd N nie przekroczyło wartości 120). Może nasi Czytelnicy mają jeszcze inne pomysły ? Zmieniać, nie zmieniać ? A jeśli, to jak ? Czekamy na listy.

Tymczasem przejdźmy do corocznego omówienia wybranych zadań.

Zadanie 151 [Minimalna sieć łącząca wierzchołki kwadratu] (współczynnik trudności $WT = 2,66$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 10$). Po redukcji zagadnienia do sieci złożonych z pięciu odcinków, z dwoma węzłami wewnątrz kwadratu, większość autorów (tak jak i my) stosowała metody analityczne. Jedynie **A. Szymczak** znalazł proste geometryczne dokończenie rozwiązania: $ABCD$ – dany kwadrat, $|AB| = 1$; P, Q – węzły siatki; ABM, CDN, APS, CQT – trójkąty foremne; ABP i AMS – trójkąty przystające $\Rightarrow |BP| = |MS|$; podobnie $|DQ| = |NT|$; stąd $|AP| + |BP| + |PQ| + |CQ| + |DQ| = |MS| + |SP| + |PQ| + |QT| + |TN| \geq |MN| = 1 + \sqrt{3}$.



Zadanie 154 [n prostych równoległych w równych odstępach, przechodzących przez wierzchołki n–kąta foremnego] ($WT = 2,52$; $LPR = 16$). Uogólnienie: **A. Bonk i M. Mazur** pokazali, że tylko dla $n = 3, 4, 6$ istnieje n takich prostych w odległościach współmiernych.

Zadanie 155 [$f(x) = 2^{-x} + 2^{-1/x}$; $\sup\limits_{(0;\infty)} f = ?$] ($WT = 2,45$; $LPR = 10$). Oryginalnością wyróżnia się rozwiązanie **H. Kasprzaka** (który bada funkcję $g(t) = f(e^t)$), prostotą zaś rozwiązanie **G. Zakrzewskiego**:
dla $x \geq 1$ mamy z nierówności Bernoulli'ego
$2^{-1/x} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/x} \leq 1 - \frac{1}{2x}$; stąd,
dla $x \geq 2$: $2^x = 2(1+1)^{x-1} \geq 2(1 + x - 1) = 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \leq \frac{1}{2x} + \left(1 - \frac{1}{2x}\right) = 1$;
dla $1 \leq x \leq 2$: $f'(x) = (\ln 2)x^{-2}2^{-x}\varphi(x)$, gdzie
$\varphi(x) = 2^x 2^{-1/x} - x^2 \leq 2x\left(1 - \frac{1}{2x}\right) - x^2 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(1) = 1$,
tak, że $\sup\limits_{(0;\infty)} f = \sup\limits_{\langle 1;\infty)} f = 1$.

Zadanie 157 [Wielokąt W zawiera koło o promieniu (pole W)/(obwód W)] ($WT = 3,83$; $LPR = 0$) było o wiele za trudne. Obszerniejszy komentarz wraz z rozwiązaniem zamieściliśmy w numerze 8/1988.

Zadanie 160 [$x_1, x_2 > 0$ dane; $x_{n+2} = 2(x_n + x_{n+1})^{-1} \Rightarrow$ ciąg (x_n) jest zbieżny] ($WT = 3,55$; $LPR = 3$). Oto najładniejsze rozwiązanie (**H. Kasprzak**): Niech $d = \liminf x_n$, $g = \limsup x_n$ (d, g są dodatnie i skończone,bo leżą między najmniejszą a największą z liczb $x_1, x_2, x_1^{-1}, x_2^{-1}$). Istnieją ciągi liczb naturalnych (k_n), (l_n) takie, że następujące podciągi ciągu (x_n) są zbieżne do granic: $x_{k_n-1} \to a$, $x_{k_n} \to b$, $x_{k_n+1} \to c$, $x_{k_n+2} \to d$, $x_{l_n} \to e$, $x_{l_n+1} \to f$, $x_{l_n+2} \to g$; przy tym $a, b, c, e, f \in \langle d; g\rangle$. Na mocy określenia ciągu (x_n):

$$(b+c)d = 2, \quad (e+f)g = 2, \quad (a+b)c = 2.$$

Pierwsza z tych równości daje $2gd \geq 2$, a druga daje $2dg \leq 2$; stąd $dg = 1$. Zatem $b + c = 2/d = 2g$, czyli $b = c = g$. Wobec tego $a + b = 2/c = 2/g = 2d$, czyli $a = b = d$ i ostatecznie $g = b = d$. Poza tym bezbłędne rozwiązania podali: **P. Jędrzejewicz, R. Latała**, a z dużymi zastrzeżeniami: **K. Pióro, G. Zakrzewski.**

Zadanie 161 [Za pomocą jednego dwuargumentowego działania wyrazić cztery działania arytmetyczne w $\mathbf{R}$] ($WT = 2,89$; $LPR = 12$). Autorzy rozwiązań wykazali dużą inwencję i różnorodność pomysłów. Najbardziej efektowna była chyba konstrukcja, którą zaproponował **A. Przeździecki**; podajemy ją nieznacznie zmodyfikowaną. Niech f będzie dowolną bijekcją $\mathbf{R}$ na przedział $(0; 1)$; przyjmijmy

$$a * b = \begin{cases} 2, & \text{gdy } a = b = 0 \\ 3, & a = 0,\ b = 1 \\ 4, & a = 1,\ b = 0 \\ 5, & a = b = 1 \\ f^{-1}(a-2) + b, & a \in (2; 3),\ b \text{ dowolne} \\ f^{-1}(a-3) - b, & a \in (3; 4),\ b \text{ dowolne} \\ f^{-1}(a-4) \cdot b, & a \in (4; 5),\ b \text{ dowolne} \\ f^{-1}(a-5) : b, & a \in (5; 6),\ b \neq 0 \\ a + f(b), & a \in \{2, 3, 4, 5\},\ b \text{ dowolne} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wtedy:

$$((0 * 0) * a) * b = a + b \qquad ((1 * 0) * a) * b = ab$$
$$((0 * 1) * a) * b = a - b \qquad ((1 * 1) * a) * b = a : b$$

Zadanie 164 [$a_1 = 44$, $a_{n+1} = 44^{a_n} \Rightarrow$ wszystkie a_n z $n > 44$ mają jednakową końcówkę 44–cyfrową] ($WT = 3,25$; $LPR = 8$). Eleganckie rozwiązanie oparte na twierdzeniu Eulera podali **A. Przeździecki, P. Kumor, R. Latała**: teza zadania łatwo wynika z relacji $a_n \equiv a_{n+1} (\operatorname{mod} 5^{n-1})$, której dowodzi się indukcyjnie:
z założenia indukcyjnego, $a_{n+1} - a_n = 5^{n-1}b_n = 4 \cdot 5^{n-1}c_n$,
a z twierdzenia Eulera $44^{\varphi(5^n)} = 44^{4 \cdot 5^{n-1}} \equiv 1 (\operatorname{mod} 5^n)$, skąd
$a_{n+2} = a_{n+1} \cdot 44^{a_{n+1} - a_n} = a_{n+1} \cdot 44^{4 \cdot 5^{n-1} c_n} \equiv a_{n+1} (\operatorname{mod} 5^n)$.
Inne dobre rozwiązania: **A. Bonk, Z. Surduka, A. Szymczak, G. Zakrzewski, A. Pawłowski.**

Zadanie 165 [$\lim\limits_{+\infty}(f + f') = 0 \Rightarrow \lim\limits_{+\infty}(f) = 0$] ($WT = 2,88$; $LPR = 6$). Dobre rozwiązania (nie różniące się istotnie od naszych): **A. Bonk, H. Kasprzak, R. Latała, A. Przeździecki, K. Serbin** oraz (z zastrzeżeniami) **K. Zawisławski. H. Kasprzak** dowodzi wzmocnionej wersji twierdzenia: Niech $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_k \in \mathbf{C}$ (zespolone); dalej niech

$$\mathcal{F} = \{f : (0; +\infty) \to \mathbf{C},\ n\text{–krotnie różniczkowalna}\};$$

dla $f \in \mathcal{F}$ przyjmijmy $PDf = a_0 f + a_1 f' + \ldots + a_n f^{(n)}$.
Teza:

$$\bigwedge_{f \in \mathcal{F}} \left(\lim_{+\infty} PDf = 0 \Rightarrow \lim_{+\infty} f = 0\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{z \in \mathbf{C}} \left(P(z) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z < 0\right)$$

Zadania 168, 170, 171. H. Kasprzak wskazuje naturalne uogólnienia wielowymiarowe.

Zadanie 172 [Zbieżność i granica ciągu (x_n) : x_1, $x_{n+1} = x_n^{1-1/n} - (ne)^{-1}$] ($WT = 3,26$; $LPR = 2$). Piękne rozwiązanie znalazł **H. Kasprzak**: Niech $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$. Wszystkie $x_n \in (1/e; 1\rangle$ (prosta indukcja), zatem $1/e \leq a \leq b \leq 1$. Rozpatrujemy ciąg $t_n = x_n^{n-1} x_{n+1}^{-n}$. Zachodzi nierówność $\liminf t_n \leq \liminf (t_1 \ldots t_n)^{1/n} = \liminf x_{n+1}^{-1} = 1/b$. Na mocy określenia ciągu (x_n),

$$t_n = (x_n^{1-1/n} x_{n+1}^{-1})^n = ((x_{n+1} + (ne)^{-1}) x_{n+1}^{-1})^n =$$
$$= (1 + u_n)^n = v_n^{1/ex_{n+1}},$$

gdzie $u_n = (nex_{n+1})^{-1} \to 0$, $v_n = (1 + u_n)^{1/u_n} \to e$. Stąd $\liminf t_n = e^{1/eb}$. Otrzymujemy nierówność $1/b \geq e^{1/eb}$, której jedynym rozwiązaniem jest liczba $b = 1/e$.
Zatem $1/e = a = b = \lim x_n$.
Drugie bezbłędne rozwiązanie, którego autorem jest **G. Zakrzewski**, wygląda po niewielkiej adaptacji następująco: Jak wyżej, $x_n > 1/e$. Dowodzimy indukcyjnie monotoniczności ciągu (x_n) : $x_1 > x_2$; załóżmy, że $x_{n-1} > x_n$. W znanej nierówności

$$\left(1 + \frac{a}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \quad (a > 0),$$

przyjmijmy $a = (ex_n)^{-1}$ i pomnóżmy stronami przez x_n^n; otrzymamy

$$L = x_n(x_n + ((n-1)e)^{-1})^{n-1} < (x_n + (ne)^{-1})^n = P.$$

Przypuśćmy, że $x_n \leq x_{n+1}$. Wówczas, zgodnie z określeniem ciągu (x_n), $P \leq (x_{n+1} + (ne)^{-1})^n = x_n^{n-1}$, natomiast $L = x_n x_{n-1}^{n-2} > x_n x_n^{n-2} = x_n^{n-1}$ – sprzeczność. Zatem $x_n > x_{n+1}$. Dowodzi to, że ciąg (x_n) jest malejący, więc zbieżny. Obliczenie granicy przebiega jak w naszym rozwiązaniu.
Zasadniczo poprawny dowód monotoniczności ($\Rightarrow$ zbieżności) ciągu (x_n) podał także **K. Zawisławski.**

Zadanie 47 [Temperatura włókna żarówki przy podwyższonym napięciu] omawiałem przed rokiem i wtedy przyznałem się do błędu nie popełnionego, albowiem rozwiązanie w *Delcie* 8/1987 jest całkowicie poprawne.

Zadanie 51 [Odbicie kuli od tarczy] ($WT = 2,08$; $LPR = 11$). Rozwiązanie podane w *Delcie* zakładało (milcząco), że masa kulki jest zaniedbywalna w porównaniu z masą tarczy. Skończony stosunek mas kulki i tarczy m/M przyjęli w swoich rozwiązaniach **J. Lipkowski, P. Bała, A. Bonk, Dz. Lipniacki, P. Mocny, R. Musiał, W. Kacprzak.** Wśród nich jedynie **P. Mocny** dokonał przejścia granicznego z $m/M \to 0$.

Zadanie 52 [Kondensator o niezrównoważonym ładunku] ($WT = 3,44$; $LPR = 3$). Zadanie to – wbrew przewidywaniom – okazało się bardzo trudne. Dobrze rozwiązali tylko **P. Bała, W. Klimala i P. Wach.**

Zadanie 54 [Mikrodruk odczytywany za pomocą mikroskopu elektronowego] ($WT = 3,26$; $LPR = 4$). Satysfakcjonujące rozwiązania nadesłali **P. Bała, Dz. Lipniacki, R. Musiał i L. Szalast.**

Zadanie 55 [Identyfikacja nietypowego opornika spośród piętnastu] ($WT = 1,94$; $LPR = 21$). Wystąpiła duża różnorodność rozwiązań. Metodę z najmniejszą liczbą (czterech) pomiarów podali **R. Musiał, A. Rawlik i P. Stanek**. Dalsze dziesięć osób podało metodę wykorzystującą pięć pomiarów. Reszta poprawnych rozwiązań zawierała sześć pomiarów.

Zadanie 58 [Sprężanie powietrza w cylindrze] ($WT = 3,16$; $LPR = 1$). Jedyne dobre rozwiązanie **Dz. Lipniackiego.** Część osób potraktowała rozważaną przemianę gazową jako odwracalną, co było, oczywiście, niesłuszne. Ważniejsze jednak jest to, że nikt nie wymienił jako istotnego w omawianym procesie zjawiska dyssypacji energii związanej z lepkością gazu (w treści zadania celowo podano powietrze, a nie „gaz doskonały"). To dzięki temu właśnie zjawisku występuje zależność przyrostu temperatury powietrza w cylindrze od masy tłoka. Na marginesie apel do uczestników ligi: zwracajcie więcej uwagi na fizykę aniżeli na rachunki!

Zadanie 60 [Pole magnetyczne w solenoidzie] ($WT = 3,41$; $LPR = 6$). Poprawne rozwiązania **Dz. Lipniackiego, P. Perkowskiego, P. Wacha, P. Koczyńskiego, B. Mikielewicza i P. Baly.** Nikt z uczestników nie przeanalizował wpływu obecności rdzenia na wartość natężenia pola magnetycznego w jego wnętrzu dla przypadku solenoidu (oraz rdzenia) o skończonej długości. Tymczasem wynik takiej analizy jest bardzo ciekawy: w solenoidzie z rdzeniem o przenikalności magnetycznej $\mu > \mu_0$ natężenie pola jest niższe niż w analogicznym solenoidzie bez rdzenia. Powód – większe w przypadku solenoidu z rdzeniem natężenie pola po jego zewnętrznej stronie.

Zadanie 61 [Betatron] ($WT = 1,22$; $LPR = 18$). Problem okazał się znany wielu uczestnikom ligi z literatury, stąd najniższa wartość WT.

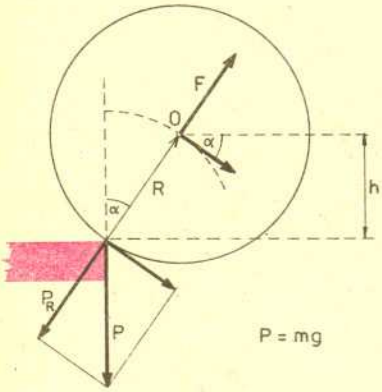
Zadanie 62 [Gaz w szybie naftowym] ($WT = 2,97$; $LPR = 6$). **B. Mikielewicz i A. Sikorski** uwzględnili ilościowo ściśliwość ropy naftowej. Okazuje się, że – o ile ilość gazu nie jest zbyt wielka – ściśliwość w dużym stopniu zmniejsza rozpatrywany efekt wzrostu ciśnienia.

Zadanie 65 [Przetaczanie walca przez walec] ($WT = 3,16$; $LPR = 4$). Dobrze rozwiązali jedynie **R. Musiał, Dz. Lipniacki, A. Sikorski i A. Kondracki.**

Zadanie 66 [Szacowanie promienia planety utrzymującej atmosferę] ($WT = 1,75$; $LPR = 13$). **P. Bała, Dz. Lipniacki, M. Kwiecień, i K. Lisowski** zwrócili uwagę na to, że spełnienie (przyjętego w rozwiązaniu *Delty*) warunku, aby średnia kwadratowa prędkość termiczna cząsteczek gazu atmosfery była mniejsza od drugiej prędkości kosmicznej, nie zapewnia utrzymania się atmosfery na planecie przez dłuższy czas. Trwałość atmosfery w kosmicznej skali czasu wymaga, aby stosunek prędkości był mniejszy od 1/5.

Zadanie 67 [Pole elektryczne w złączu $p-n$] ($WT = 2,57$; $LPR = 11$). **P. Bała i P. Koczyński** skorzystali z równania Poissona, **A. Gluza, J. Lipkowski i A. Sikorski** zastosowali prawo Gaussa; powodzenie tej ostatniej metody zależało od należytego określenia warunków brzegowych – wartości natężenia pola poza obszarem złącza.

Zadanie 69 [Okulary z lusterkiem] ($WT = 2,66$: $LPR = 6$). Zdumiewająco mało dobrych rozwiązań tak przecież prostego problemu. Nadesłali je **Dz. Lipniacki, A. Sikorski, P. Bała, W. Klimala, B. Mikielewicz i A. Surma.**



Zadania z fizyki nr 81, 82

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

81. Mając naczynie z kwasem siarkowym nieco rozcieńczonym i drugie z wodą destylowaną, chcemy sporządzić w trzecim naczyniu roztwór kwasu o znanym stężeniu. Jedyny przyrząd pomiarowy, jakim dysponujemy, to zegarek ze stoperem. Ponadto mamy jeszcze długą, wąską probówkę obciążoną u dołu, która w obu cieczach pływa w pozycji pionowej.
W jaki sposób możemy wyznaczyć stężenie sporządzonego roztworu? Wyprowadzić odpowiednie wzory. Przyjąć znaną gęstość czystego kwasu siarkowego oraz wody.

82. Równoległa wiązka światła pada na całą płaską powierzchnię szklanego półcylindra pod kątem 45°, w płaszczyźnie prostopadłej do jego osi. Z jakiej części bocznej powierzchni półcylindra wychodzi światło, jeśli współczynnik załamania światła wynosi n ?

Zadanie 81 pochodzi od pana J. Lipkowskiego

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1988

Przypominamy treść zadań:

73. Na krawędzi stołu o wysokości H spoczywa kulka o promieniu R ($R \ll H$). Kulka zaczyna się zsuwać ze stołu bez tarcia. W jakiej odległości od stołu upadnie ona na podłogę ?

74. Patrząc na rząd lamp na ulicy odnosimy wrażenie, że wszystkie one są jednakowo jasne, chociaż znajdują się w różnej odległości od nas. Dlaczego tak jest i dlaczego reguła ta nie stosuje się do gwiazd o tej samej jasności powierzchniowej, położonych w różnych odległościach od Ziemi ?

73. Skoro kulka zsuwa się bez tarcia, jej prędkość obrotowa pozostaje stała, czyli zerowa. Tak długo, jak kulka nie traci styczności ze stołem, jej środek masy O (rys.) porusza się po okręgu o promieniu R. Na kulkę działa więc siła odśrodkowa $F = mv^2/r$ (m – masa kulki, v – prędkość kulki). W chwili, gdy siła ta przekroczy wartość składowej siły ciężkości kulki działającej wzdłuż promienia na krawędź stołu $P_R = mg \sin\alpha = mgh/R$ (g – przyspieszenie ziemskie, α i h oznaczone na rysunku), nastąpi oderwanie się kulki od stołu. Energia kinetyczna kulki powstaje kosztem jej energii potencjalnej. Stąd mamy $mv^2/2 = mg(R-h)$, $F = 2mg(R-h)/R$. Przyrównując F do P_R uzyskujemy wartość h, przy której nastąpi oderwanie się kulki od stołu, $h_0 = 2R/3$ oraz prędkość kulki w tym momencie $v_0 = 2gR/3$ i odpowiedni kąt $\alpha_0 = \arcsin(2/3)$. Wobec spełnienia warunku $R \ll H$ składowa pionowa prędkości początkowej nie odgrywa znaczącej roli i zasięg poziomy kulki wynosi $Z = (v_0 \cos\alpha)t = (\sqrt{5}/3)v_0 t$, gdzie t jest czasem swobodnego spadku z wysokości H: $t = \sqrt{2H/g}$. Ostatecznie więc $Z = 2/3\sqrt{5/3}\sqrt{RH}$.

74. Przyjmujemy, że lampy są jednakowe. Ilość światła lampy oddalonej o l od obserwatora, padająca na źrenicę oka jest proporcjonalna do l^{-2}. Powierzchnia obrazu lampy na siatkówce oka jest proporcjonalna do l^{-2}. W konsekwencji jasność obrazu lampy na siatkówce oka nie zależy od l. Rozumowanie to jest słuszne przy zaniedbaniu pochłaniania bądź rozpraszania światła przez atmosferę (np. podczas mgły sytuacja jest zupełnie inna) oraz przy założeniu, że rozmiary obrazu lampy na siatkówce spełniają znaną z optyki geometrycznej zależność między rozmiarami obrazu utworzonego przez soczewkę, odległościami obrazu i przedmiotu od soczewki a rozmiarami przedmiotu.
W przypadku gwiazd (poza – oczywiście – Słońcem) zależność ta nie jest spełniona: rozmiary obrazu gwiazdy na siatkówce są określone przez dyfrakcję światła na źrenicy oka, nie zależą natomiast od rozmiarów gwiazdy (bezdyfrakcyjny obraz gwiazdy byłby niezmiernie mały).
W związku z tym odbierana wzrokiem (ale także obserwowana w największych teleskopach) jasność gwiazdy jest miarą całkowitej ilości docierającego od tej gwiazdy światła, a nie jej jasności powierzchniowej.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki,

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 F

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 69 ($WT=2,66$) i 70 ($WT=1,74$)

Piotr Bała	– Toruń	2–45,15pkt
Zbigniew Gallas	– Kraków	32,46pkt
Roman Musiał	– Katowice	31,60pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	29,70pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	29,70pkt
Adam Sikorski	– Lublin	29,36pkt
Wiesław Kacprzak	– Kraków	28,35pkt
Aleksander Surma	– Myszków	1–24,81pkt
Janusz Osada	– Legnica	24,07pkt
Paweł Rogocz	– Legnica	23,63pkt
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	2–21,17pkt
Andrzej Bilmes	– Gorlice	20,82pkt
Robert Repucha	– Gołdap	1–20,68pkt
Wojciech Klimala	– Bielsko-Biała	19,44pkt
Maciej Stasiak	– Człuchów	18,73pkt
Andrzej Bonk	– Chełmża	18,21pkt
Tomasz Rusin	– Warszawa	17,88pkt
Jerzy Lipkowski	– Elbląg	1–16,94pkt
Mirosław Semla	– Opole	15,20pkt
Jacek Stelmach	– Zabrze	1–14,83pkt
Marek Karaś	– Tarnów	14,33pkt
Mariusz Bogacz	– Pińczów	14,20pkt
Anna Gluza	– Toruń	1–14,15pkt
Tomasz Wietecha	– Tarnów	13,53pkt
Przemysław Gworys	– Częstochowa	13,26pkt
Paweł Stanek	– Tarnów	13,18pkt
Piotr Wach	– Katowice	1–12,33pkt
Wojciech Peisert	– Wrocław	12,25pkt
Leszek Szalast	– Radzyń Podl.	1– 6,58 pkt
Tomasz Rawlik	– Gliwice	1– 6,22 pkt
Bogusław Mikielewicz	– Brodnica	1– 4,10 pkt

Pan Bała został pierwszym weteranem **Klubu 44F** – serdecznie gratulujemy !
Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 12 punktów, a także członków **Klubu 44F**, mających obecnie na koncie mniej niż 10 punktów, ale wykonujących już kolejną rundę. Cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.
Jak widać, **Klub 44F** liczy 11 członków.

Zadania z matematyki nr 183, 184

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1989

183. Czy istnieje sześciokąt wypukły, którego pole S oraz średnica d (czyli największa z odległości między wierzchołkami) spełniają zależność $3S > 2d^2$?

184. Liczby dodatnie $x_1, \ldots, x_n$ spełniają warunki $x_1 + \ldots + x_n = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 44$. Dowieść, że $x_1^{44} + \ldots + x_n^{44} \geq 44$.

Zadanie **184** zaproponował pan Jarosław Wróblewski z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1988

Przypominamy treść zadań:

175. W trójkącie ABC: $|\angle ABC| = |\angle BCA| = 40°$. Na półprostej $AB^{\to}$ znajdujemy punkt D taki, że $|AD| = |BC|$. Wyznaczyć kąty trójkąta ADC.

176. Udowodnić nierówność

$$\left(x^2 + x + \frac{n}{2}\right)^n > \frac{1}{2}\left(x^{2n} + (x+1)^{2n}\right)$$

dla $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ i dla $x \in \mathbb{R}$.

175. Oznaczmy liczby $\cos 10°$ i $\sin 10°$ odpowiednio przez c i s. Zachodzą równości:

$$\sin 20° = 2cs, \quad \frac{1}{2} = \sin 30° = 3s - 4s^3,$$

$$\cos 20° = 1 - 2s^2 = \frac{1}{2s}(3s - 4s^3 - s) = \frac{1}{2s}\left(\frac{1}{2} - s\right),$$

$$\sin 40° = 2\sin 20° \cos 20° = c(1 - 2s)$$

$$\cos 40° = 1 - 2\sin^2 20° = 1 - 8s^2(1 - s^2) = 1 - 2s(3s - 4s^3 + s) =$$

$$= 1 - 2s\left(\frac{1}{2} + s\right) = (1 - 2s)(1 + s),$$

$$\operatorname{tg} 40° = \frac{\sin 40°}{\cos 40°} = \frac{c}{1 + s}.$$

Przyjmijmy dalej oznaczenia: $|\angle BCD| = \varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = t$, $|AB| = |AC| = a$, $|BC| = |AD| = b$. Stosując wzór sinusów do trójkątów ABC oraz ACD otrzymujemy związki

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 40°}{\sin 100°} = \frac{\sin 40°}{\cos 10°} = 1 - 2s \quad \text{oraz} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin(40° - \varphi)}{\sin(40° + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 40° - \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg} 40° + \operatorname{tg}\varphi} = \frac{c - (1+s)t}{c + (1+s)t}.$$

Przez przyrównanie prawych stron dochodzimy do równania

$$(1 - 2s)\big(c + (1+s)t\big) = c - (1+s)t,$$

z którego obliczamy:

$$t = \frac{cs}{(1-s)(1+s)} = \frac{s}{c} = \operatorname{tg} 10°.$$

To znaczy, że $\varphi = 10°$. Zatem kąty trójkąta ADC mają miary $100°$, $30°$, $50°$.

176. Przekształcamy lewą i prawą stronę podanej nierówności (L i P), oznaczając $x + \frac{1}{2} = y$:

$$L = \left(y^2 + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{2(n-k)} \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)^k,$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} y^{2n-2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Wobec tego

$$L - P = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)^k - \binom{2n}{2k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) y^{2(n-k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 4^{-k} \binom{2n}{2k} \big(a(n,k) - 1\big) y^{2(n-k)}$$

gdzie

$$a(n,k) = \binom{2n}{2k}^{-1} \binom{n}{k} (2n-1)^k.$$

Nierówność $L > P$ będzie udowodniona, jeśli wykażemy, że liczby $a(n,0), \ldots, a(n,n)$ są ≥ 1, przy czym $a(n,n) > 1$. Ponieważ

$$\frac{a(n,k+1)}{a(n,k)} = \frac{(2n-2k-2)!\,(2k+2)!\,(n-k)!\,k!\,(2n-1)}{(2n-2k)!\,(2k)!\,(n-k-1)!\,(k+1)!} = 1 + \frac{4kn}{2n-2k-1},$$

zatem

$$1 = a(n,0) = a(n,1) < a(n,2) < \ldots < a(n,n)$$

i dowód jest zakończony.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 171 (WT=1,05) i 172 (WT=3,26)

Krzysztof Jedziniak	– Katowice	1–43,60
Marian Roman	– Ełk	1–43,09
Andrzej Sudoł	– Nowy Sącz	42,56
Adam Ruszel	– Krosno	42,55
Edward Orzechowski	– Warszawa	2–41,15
Kazimierz Serbin	– Sanok	2–40,12
Grzegorz Kuś	– Kraków	39,93
Adam Przeździecki	– Warszawa	38,50
Marek Gałecki	– Milanówek	5–36,70
Dzierżysław Lipniacki	– Lublin	36,66
Zygmunt Bartkowski	– Warszawa	36,49
Grzegorz Zakrzewski	– Trzcianka	1–36,07
Andrzej Bonk	– Chełmża	2–35,64
Zbigniew Surduka	– Czechowice Dz.	35,54
Wojciech Krzyżański	– Żywiec	34,45
Jerzy Małopolski	– Kraków	1–34,05
Artur Smolczyk	– Tarnów Op.	1–33,68
Jerzy Tyszkiewicz	– Warszawa	33,28
Paweł Kubit	– Krosno	33,11
Tomasz Rawlik	– Gliwice	3–33,03
Dariusz Rybacki	– Kraśnik	32,80
Mariusz Łopusiewicz	– Legnica	32,15
Rafał Latała	– Warszawa	31,96
Piotr Figurny	– Lubartów	1–31,39
Krzysztof Jakubczak	– Kudowa Zdrój	31,00
Dariusz Kowalczyk	– Warszawa	29,81
Andrzej Krzysztofowicz	– Gdańsk	29,66
Władysław Wasiak	– Toruń	28,92
Józef Siwy	– Łaziska Grn.	1–28,64
Adam Czornik	– Bytom	28,38
Jarosław Kaczyński	– Starogard Gd.	28,31
Krzysztof Zawisławski	– Warszawa	1–28,17
Stanisław Dorosz	– Kraków	28,06
Piotr Kumor	– Olsztyn	1–28,05
Zbigniew Galias	– Kraków	1–27,90
Maciej Głuszek	– Wrocław	27,85
Janusz Prajs	– Opole	27,57
Mirosław Matlęga	– Skoczów	27,03
Tomasz Komorowski	– Świdnik	2–26,82
Jerzy Ciało	– Wrocław	26,56
Radosław Zapert	– Kielce	26,51
Ryszard Pagacz	– Zawadzkie	2–25,72
Andrzej Szymczak	– Gdańsk	25,58
Jerzy Janowicz	– Bolesławiec	6–25,09
Krzysztof Zygan	– Lublin	24,98
Adam Stadler	– Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	– Sopot	24,93
Tomasz Masłowski	– Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	– Warszawa	1–24,31
Adam Wyrwa	– Nowy Wiśnicz	1–23,43
Lech Bartłomiejczyk	– Gliwice	22,50
Jerzy Mikuta	– Zielona Góra	2–21,59
Anna Gluza	– Toruń	1–20,97
Małgorzata Czerniakowska	– Gdańsk	1–20,54
Krystyna Witek	– Ostrów Maz.	1–20,38

Legenda (przykładowo): stan konta 6–25,09 oznacza, że uczestnik już sześciokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (siódmej) rundzie ma 25,09 p.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 20 punktów. Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie)(cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów):
Z. Bartold (2), T. Biegański (1), W. Boratyński (1), J. Ciach (2), M. Fiszer (1), K. Hryniewiecki (1), K. Jachacy (1), P. Jędrzejewicz (2), T. Józefczyk (2), P. Kamiński (5), H. Kasprzak (1), Z. Koza (2), D. Kurpiel (2), M. Mańdziuk (1), M. Marczak (1), M. Mazur (3), R. Mazurek (1), H. Mikołajczak (1), M. Mikucki (1), J. Milczarek (1), R. Mitraszewski (1), W. Olszewski (1), A. Pawłowski (4), K. Pióro (1), M. Prauza (2), S. Solecki (2), D. Sowizdrzał (3), T. Szymczyk (1), W. Szymczyk (1), J. Uryga (4), P. Wach (1), Z. Zaus (1).