Zwykłe izometrie zwykłej płaszczyzny

Dr hab. Marek KORDOS

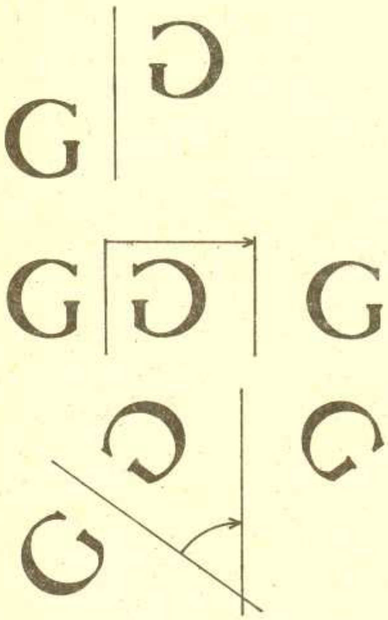
Sądzi się często, że rzeczy doskonale znane, takie, z którymi stykamy się na co dzień, nie mogą kryć w sobie żadnych zaskakujących faktów. Tymczasem na ogół jest wręcz przeciwnie. Choćby izometrie płaszczyzny euklidesowej – przesunięcia, obroty, symetrie i to, co się uzyska z ich złożeń. Jest ich wielkie mnóstwo i trudno się spodziewać, by dowolnie wybrane dwie spośród nich, powiedzmy φ i ψ, miały być związane jakąś jedną, z góry daną, zależnością. Okazuje się jednak, że taka zależność istnieje – została podana np. w artykule W. Guzickiego i P. Zakrzewskiego w *Delcie* 5/1987 –

$$\varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^4 \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2 = id. \tag{1}$$

Prosta to ta równość nie jest, ale w ogóle samo jej istnienie zaskakuje. Postaramy się tę równość udowodnić.

Sto pięćdziesiąt lat temu matematyk francuski Michel Chasles (czyt. szal) stwierdził, że
- każda izometria płaszczyzny euklidesowej może być uzyskana ze złożenia nie więcej niż trzech symetrii osiowych,
- izometriami płaszczyzny euklidesowej są tylko przesunięcia, obroty i symetrie z poślizgiem.

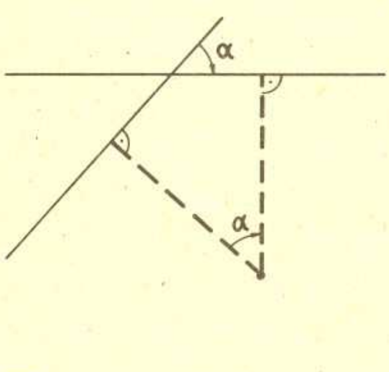
Drugie z tych zdań jest znane jako twierdzenie Chaslesa. Orzeka ono, że jakkolwiek nie składalibyśmy izometrii, to ostateczny efekt będzie przekształceniem jednego z tych trzech rodzajów.



Wypada tu może objaśnić, co to takiego symetria z poślizgiem (w szkole średniej uczono o tym tylko 18 roczników licealistów). Symetria z poślizgiem to złożenie symetrii osiowej z przesunięciem równoległym do osi. Złożenie takie jest dlatego obdarzone osobną nazwą, że jest wszystko jedno, co wykonamy najpierw, a co potem – symetrię czy przesunięcie. Szczególnym przypadkiem symetrii z poślizgiem jest symetria osiowa – odpowiada to zerowemu przesunięciu.

Zestawiając oba przytoczone ustalenia Chaslesa możemy uzyskać następne informacje o izometriach:
- złożenie każdej parzystej liczby symetrii osiowych daje się zredukować do złożenia dwóch takich symetrii,
- złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach równoległych jest przesunięciem o podwojony wektor łączący te osie i prostopadły do nich,
- złożenie dwóch symetrii osiowych o osiach przecinających się jest obrotem o podwojony kąt między tymi osiami,
- złożenie każdej nieparzystej liczby symetrii osiowych daje się zredukować do złożenia trzech takich symetrii i jest symetrią z poślizgiem.

Pierwsze i ostatnie z tych zdań dają łącznie spostrzeżenie, że kwadrat każdej izometrii płaszczyzny jest przesunięciem lub obrotem.



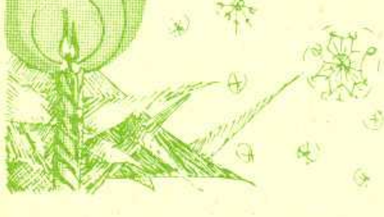
Przy obrocie o kąt α nie tylko proste przechodzące przez środek obrotu, lecz wszystkie proste zmieniają swój kierunek o α. Aby się o tym przekonać, wystarczy skorzystać z twierdzenia o kątach mających odpowiednie ramiona prostopadłe.

Spostrzeżenie to pozwala na wyciągnięcie bardzo ogólnego wniosku:

złożenie obrotów (o dowolnych środkach) o kąty α_1, α_2, ..., α_n jest przesunięciem, gdy $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 2k\pi$ i obrotem o α – w przeciwnym przypadku.

Istotnie – tylko dla przesunięcia kierunek żadnej prostej nie ulega zmianie.

Wszystko to pozwala już na dowód równości (1). Jeśli się ma podejrzenie, że jakaś równość podobna do niej zachodzi (lub jeśli się przyjmie hipotezę, że tak jest), można ją znaleźć.



Weźmy więc jakieś dowolne dwie izometrie φ i ψ. Druga potęga każdej z nich jest, jak wiemy, albo przesunięciem, albo obrotem. Zatem każda z kombinacji postaci

$$\xi^{-1} \eta^{-1} \xi \eta \tag{2}$$

utworzona przez podstawienie w miejsce η przekształceń φ^2 lub φ^{-2}, a w miejsce ξ – ψ^2 lub ψ^{-2} jest przesunięciem (wystarczy zsumować kąty).

Z kolei, gdy w (2) zarówno η, jak i ξ są przesunięciami, to otrzymujemy identyczność. Istotnie: ponieważ przesunięcia są przemienne, więc

$$\xi^{-1} \eta^{-1} \xi \eta = \xi^{-1} \xi \eta^{-1} \eta = id\ id = id.$$

Zatem, aby otrzymać (1), wystarczy w (2) w miejsce η podstawić φ^2, a w miejsce ξ – ψ^{-2} otrzymując

$$\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2,$$

a następnie odpowiednio φ^{-2} i ψ^{-2}, co da

$$\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2}$$

i do tych przekształceń ponownie zastosować (2). Da to, w myśl powyższych uwag, równość

$$\begin{aligned} id &= (\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2})^{-1} (\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2)^{-1} (\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2}) (\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2) = \\ &= (\varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2}) (\varphi^{-2} \psi^2 \varphi^2 \psi^{-2}) (\psi^2 \varphi^2 \psi^{-2} \varphi^{-2}) (\psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2) = \\ &= \varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 (\varphi^2 (\psi^{-2} \psi^2) \varphi^2) \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2 = \\ &= \varphi^2 \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^4 \psi^{-2} \varphi^{-2} \psi^2 \varphi^{-2} \psi^{-2} \varphi^2, \end{aligned}$$

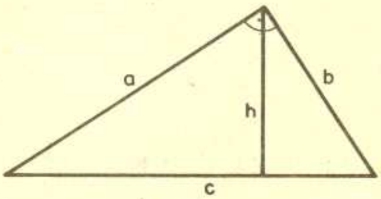
czyli równość (1). Aby przeprowadzić te rachunki, trzeba tylko zauważyć, że dla dowolnych przekształceń ξ i η jest

$$(\xi \eta)^{-1} = \eta^{-1} \xi^{-1}.$$

Tym sposobem równość (1) została udowodniona. Dowód okazał się krótki i, co więcej, opierał się tylko na informacji, że „jakaś taka" równość ma miejsce. Czy naprawdę tylko? Skąd mogliśmy wiedzieć, że akurat tak należy postępować? Ja tę metodę zaczerpnąłem z ogólnego pojęcia rozwiązalności grup – ale to już inna historia.

Na zakończenie pytanie dla Czytelników – czy równość (1), w której występuje 28 przekształceń, jest najkrótszą równością wiążącą dowolne dwie izometrie płaszczyzny?

Rozwiązanie zadania M 526.



Przy oznaczeniach jak na rysunku mamy $ab = ch$. Nierówność

$$a + b < c + h$$

jest równoważna z

$$a^2 + b^2 + 2ab < c^2 + h^2 + 2hc,$$

czyli

$$0 < h^2,$$

co jest oczywiste.

Patrz w niebo

Gwiazdy nie lubią żyć w samotności. Mimo że dla wielu osób stwierdzenie to nie jest oczywiste (choćby przez proste skojarzenie z pozbawionym towarzysza Słońcem), faktem jest, że wśród gwiazd przeważają układy podwójne, potrójne i w ogóle wielokrotne. Zresztą gwiazdy nie tylko nie lubią samotnie żyć, nie lubią również samotnie powstawać. Panującemu dawniej przekonaniu, że gwiazdy powstają pojedynczo, przeczą dane obserwacyjne. Z powodu niezwykle małego prawdopodobieństwa chwycenia (oczywiście za pośrednictwem pola grawitacyjnego) jednej gwiazdy przez drugą, obserwowano by miliony razy mniej układów wielokrotnych niż to jest w istocie. Istnieją również bardziej bezpośrednie dowody obserwacyjne na to, że gwiazdy powstają w grupach. Mianowicie, stosunkowo rzadko występujące wśród ogółu gwiazd olbrzymy typów O i B oraz obiekty typu *T Tauri* (teoria ewolucji przewiduje, że jedne i drugie są gwiazdami młodymi) tworzą miejscami luźne zbiorowiska, których nie można uznać za przypadkowe fluktuacje w rozmieszczeniu gwiazd na niebie. Zbiorowiska te, zwane asocjacjami, są właśnie miejscem narodzin gwiazd. Hipotezę taką wysunął w końcu lat 40. naszego wieku radziecki astrofizyk W.A. Ambarcumian. Za jej słusznością przemawia fakt, że asocjacje są utworzone z obiektów młodych, a także ich związek z mgławicami gazowo-pyłowymi, z których powstają nowe gwiazdy. Asocjacje są rozproszone po ramionach spiralnych Galaktyki, co między innymi przyczyniło się do poznania budowy tych ramion. Szczególnie bogate w gwiazdy asocjacje występują w gwiazdozbiorach Oriona i Perseusza.

Wiele cech łączy asocjacje z bardziej złożonymi układami gwiazd – gromadami otwartymi – i właściwie trudno określić ścisłą granicę między tymi obydwiema grupami. W wielu przypadkach trudno stwierdzić, czy mamy do czynienia z gromadą otwartą, czy też liczną i zwartą asocjacją. Często bywa, że gromady otwarte gwiazd stanowią jądra asocjacji. Gromady otwarte również „zamieszkują" przede wszystkim ramiona spiralne Galaktyki. Z punktu widzenia obserwacji amatorskich gromady są jednak znacznie wdzięczniejszymi obiektami. Któż nie zna Plejad! Nie sposób nie zauważyć na niebie tej zwartej gromadki sześciu gwiazd (od trzeciej do piątej wielkości gwiazdowej). Warto jednak przyjrzeć się im dokładniej – w sprzyjających warunkach atmosferycznych i korzystnym usytuowaniu Plejad (odpowiednio wysoko nad horyzontem, np. teraz – zimą) bystry obserwator może doliczyć się w sumie kilkunastu gwiazd w tej gromadzie. Plejady stanowią również wspaniały obiekt dla niewielkich lunet amatorskich. Nieco mniej efektowna jest najbliższa gromada otwarta – Hiady. Zarówno Hiady, jak i Plejady leżą w gwiazdozbiorze Byka, przy czym Hiady znajdują się w okolicy najjaśniejszej jego gwiazdy – Aldebarana (sam Aldebaran do Hiad nie należy).

Zasadniczo odmienne od wymienionych wyżej zbiorowisk gwiazd są gromady kuliste. Inna jest ich budowa – znacznie większa liczebność gwiazd, większa gęstość przestrzenna, charakterystyczny kulisty kształt z silną koncentracją ku środkowi. W przeciwieństwie do asocjacji i większości gromad otwartych gromady kuliste składają się przede wszystkim z najstarszych gwiazd naszej Galaktyki. Inne jest również ich rozmieszczenie. Gromady kuliste występują w tzw. halo (składowej sferycznej) wokół dysku Drogi Mlecznej. Odmienne rozmieszczenie w Galaktyce powoduje ciekawe konsekwencje w obserwowanych ruchach gromad. Gromady otwarte i asocjacje wraz ze Słońcem i większością gwiazd z jego otoczenia uczestniczą w ruchu obiegowym wokół masywnego centrum Galaktyki. Ruchy obiektów tego typu są dla nas powolne, ponieważ sami wraz z całym Układem Słonecznym poruszamy się w podobny sposób. Te zaś gwiazdy (i ich układy), które w rotacji dysku galaktycznego nie uczestniczą, wydają się nam szybkie. Gromady kuliste zaliczają się właśnie do tej grupy. Oczywiście, badanie ruchów gromad nie leży w zakresie możliwości obserwacji amatorskich. Można jednak poświęcić trochę uwagi obserwacjom samych gromad kulistych. Najbardziej efektowną wśród nich jest ω *Centauri*. Jednak jej obserwacje mogą planować tylko osoby, które wybierają się w dalszą podróż na południe (przynajmniej w okolice zwrotnika Raka), gdyż w naszych szerokościach geograficznych nie jest widoczna. Warto zwrócić uwagę na gromady kuliste M13 i M92 – obydwie w gwiazdozbiorze Herkulesa, który jeszcze o tej porze roku jest widoczny we wczesnych godzinach wieczornych po zachodniej stronie nieba. Jasności obydwu tych gromad są na granicy dostrzegalności gołym okiem, więc użycie lornetki może znacznie uatrakcyjnić obserwacje.

mgr Joanna UDALSKA