Wprowadzenie wykładniczej (kanonicznej) parametryzacji jest pierwszym krokiem w badaniu grup Liego. Krok drugi (znacznie trudniejszy) polega na określeniu na przestrzeni $\mathbf{R}^n$ (której fragment wokół zera stanowi zbiór parametrów przy parametryzacji kanonicznej) działania algebraicznego, związanego z działaniem grupowym w G, które przyporządkowuje parze wektorów $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ trzeci wektor, zwany ich iloczynem (lub nawiasem) Liego i oznaczany $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. W przypadku grupy z przykładu 3 odpowiednią przestrzenią jest $\mathbf{R}^3$, a nawiasem Liego wektorów jest ich iloczyn wektorowy.

Przestrzeń $\mathbf{R}^n$ z nawiasem Liego nazywa się wtedy algebrą Liego grupy G. Jej struktura algebraiczna koduje całkowitą informację o lokalnej strukturze G (tj. o tym, jaka jest grupa G w otoczeniu jedynki). Analiza możliwych postaci algebr Liego pozwala więc lokalnie opisać odpowiadające im grupy. Taki jest wierzchołek góry lodowej zwanej teorią grup Liego.

mała delta

Pętelki na torusie

Mamy torus i mamy lepką, rozciągliwą nić. Słowo „lepka" oznacza, że raz przyłożona do torusa już się od niego oderwać nie może. Może się natomiast dowolnie na nim przemieszczać. I owijamy torus tą nicią. Np. 3 razy przez otwór, potem 2 razy dookoła całego torusa, potem 5 razy przez otwór, ale w przeciwną stronę i 3 razy dookoła całego w tę samą stronę co poprzednio.

Interesują nas tylko takie owinięcia, w których koniec nitki jest połączony z jej początkiem. Na takich owinięciach będziemy rachować. Podstawową sprawą przy rachowaniu jest odpowiedź na pytanie, jakie obiekty są równe. Za jednakowe (czyli równe) owinięcia będziemy uważali takie, które można nałożyć przez przemieszczanie nici na torusie.

Dodawać owinięcia będziemy w naturalny sposób: po wykonaniu jednego owinięcia nie łączymy jeszcze jego początku z końcem, tylko koniec traktujemy jako początek drugiego owinięcia, wykonujemy je i dopiero jego koniec łączymy z początkiem pierwszego.

Pytanie o własności dodawania owinięć wydaje się trudne, a okazuje się, że są one dokładnie takie jak własności dodawania „po współrzędnych" par liczb całkowitych:

$$(k, l) + (m, n) = (k + m, l + n).$$

Gdyby udało się nam to udowodnić, to znaczyłoby to między innymi, że podany na początku przykład owinięcia jest równy takiemu: 2 razy przez otwór w przeciwną stronę, a potem 5 razy dookoła całego torusa. Bo te liczby to właśnie są oddzielnie zliczane obiegi przez otwór i oddzielnie – dookoła całości.

Widać wobec tego, jak się zabrać do dowodu – wystarczy udowodnić, że owinięcie (1 raz przez otwór, 1 dookoła i znów 1 przez otwór) jest równoważne owinięciu (2 przez otwór i 1 dookoła). Gdy te trzy owinięcia stanowią całą pętelkę, sprawa jest oczywista – wystarczy zacząć liczyć od „i znów". Nam jednak potrzebna jest możliwość zamiany kolejności owijania również wtedy, gdy te owinięcia stanowią fragment bardziej skomplikowanej pętelki. Ale to też jest proste do sprawdzenia – rysunek na okładce.

Tak więc wykazaliśmy, że grupa owinięć torusa jest izomorficzna z grupą par liczb całkowitych.

Płynie stąd (i w ogóle z podobnych owijkowych rozważań na różnych powierzchniach) szereg wniosków topologicznych, ale to już inna historia.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS