Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

$$\otimes\sqrt{\textstyle\sum\!\int !} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1989

Zadania z matematyki nr 181, 182

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

181. Na płaszczyźnie dany jest okrąg k oraz rozłączna z nim prosta l. Rozważamy wszystkie okręgi o środkach na prostej l, styczne zewnętrznie do k. Czy istnieje poza prostą l punkt, z którego wszystkie odcinki zawarte w l, będące średnicami rozważanych okręgów, są widoczne pod jednakowym kątem ?

182. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n o następującej własności: dla dowolnych nieujemnych liczb $a_1, \ldots, a_n$ o sumie równej 1 można rozbić ciąg $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$ na n podciągów tak, by suma szeregu utworzonego z wyrazów i-tego podciągu była równa a_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Zadanie **182** zaproponował pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1988

Przypominamy treść zadań

173. Czy szereg postaci $\sum \varepsilon_n n^{-1}$, gdzie $\varepsilon_n \in \{+1, -1\}$, $\lim(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)n^{-1} = 0$, może być rozbieżny ?

174. Dowieść, że dla x, y, z wymiernych, $x \neq y \neq z \neq x$, liczba $(y-z)^{-2} + (z-x)^{-2} + (x-y)^{-2}$ jest kwadratem liczby wymiernej.

173. W szeregu anharmonicznym

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \tag{1}$$

zmienimy niektóre minusy na plusy. Częstość zmian będzie na tyle duża, że powstanie szereg rozbieżny, a jednocześnie na tyle mała, że spełniony będzie warunek podany w zadaniu.

Dla dowolnej liczby naturalnej $r \geq 1$ przyjmijmy $k_r = [\log_2 r]$:

$$k_1 = 0, \quad k_2 = k_3 = 1, \quad k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = 2, \ \ldots$$

Wykażemy najpierw rozbieżność szeregu

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{rk_r}. \tag{2}$$

Mamy nierówność

$$\sum_{r=2}^{n} \frac{1}{rk_r} > \sum_{r=2}^{2^{k_n}-1} \frac{1}{rk_r} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)\frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k_n - 1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k_n} - 1}\right)\frac{1}{k_{n-1}}.$$

Suma ułamków w każdym nawiasie przekracza 1/2. Zatem n-ta suma częściowa szeregu (2) jest większa od

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k_{n-1}}\right),$$

a to dąży do nieskończoności. Tak więc szereg (2) jest rozbieżny.

Niech $M = \{rk_r : r = 2, 3, 4, \ldots\} = \{2, 3, 8, 10, 12, 14, 24, 27, \ldots\}$. Weźmy pod uwagę szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}, \tag{3}$$

gdzie
$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \\ 1 & \text{dla } n \text{ parzystych, gdy } n/2 \in M, \\ -1 & \text{dla } n \text{ parzystych, gdy } n/2 \notin M. \end{cases}$$

Oznaczmy:

$$s_n = \frac{\varepsilon_1}{1} + \frac{\varepsilon_2}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{n},$$
$$s_n' = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Z rozbieżności szeregu (2) oraz zbieżności szeregu (1) wynika rozbieżność szeregu (3), bowiem

$$s_n - s_n' = \sum_{\substack{m \leq [n/2] \\ m \in M}} \frac{1}{m} \to \infty \quad (\text{przy } n \to \infty).$$

Pozostaje dowieść, że $\lim(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n)n^{-1} = 0$. Wystarczy ograniczyć uwagę do n parzystych: $n = 2q$. Zauważmy, że $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{2q} = 2r_q$, gdzie r_q jest liczbą elementów zbioru $M \cap (0; q\rangle$. Mamy więc wykazać, że

$$\lim_{q \to \infty} \frac{1}{q} \cdot r_q = 0. \tag{4}$$

Elementami zbioru $M \cap (0; q\rangle$ są początkowe wyrazy ciągu (rk_r):

$$M \cap (0; q\rangle = \{rk_r : r = 2, 3, \ldots, r_q + 1\}.$$

W szczególności liczba $r_q k_{r_q}$ należy do tego zbioru, a więc nie przekracza q. Zatem

$$\frac{q}{r_q} \geq k_{r_q}. \tag{5}$$

Oczywiście

$$\lim_{q \to \infty} r_q = \infty, \quad \lim_{r \to \infty} k_r = \infty.$$

Wobec tego z nierówności (5) wynika relacja graniczna (4), a to znaczy, że szereg (3) ma własności, o które chodziło. Odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie jest twierdząca.

174. Oznaczmy badaną liczbę przez t oraz przyjmijmy $u = (y-z)^{-1}$, $v = (z-x)^{-1}$, $w = (x-y)^{-1}$. Zatem $u^{-1} + v^{-1} + w^{-1} = 0$, a stąd

$$t = u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2(vw + wu + uv) =$$
$$= (u + v + w)^2 - 2uvw(u^{-1} + v^{-1} + w^{-1}) = (u + v + w)^2.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Czołówka ligi zadaniowej „Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 67 (WT=2,59) i 68 (WT=1,24)
z numeru 4/1988

Bogusław Mikielewicz	– Brodnica	44,26pkt
Piotr Bała	– Toruń	41,68pkt
Roman Musiał	– Katowice	31,62pkt
Piotr Koczyński	– Warszawa	29,73pkt
Paweł Perkowski	– Szczecin	29,73pkt
Wiesław Kacprzak	– Kraków	28,39pkt
Adam Sikorski	– Lublin	25,63pkt
Aleksander Surma	– Myszków	23,23pkt

Do grona członków Klubu 44 F dołącza, jako jedenasty pan Mikielewicz.

Zadania z fizyki nr 79, 80

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

79. Podczas prób podłączenia trójlampowego żyrandola z dwiema żarówkami 100-watowymi i jedną 60-watową do sieci zaopatrzonej w dwa wyłączniki stwierdzono, że żarówki 100 W świecą normalnie przy włączonym wyłączniku (1) oraz przy obu wyłącznikach włączonych, podczas gdy żarówka 60 W świeci tylko przy włączonym wyłączniku (2) i to słabiej niż normalnie.
Podać najbardziej prawdopodobny schemat obwodu elektrycznego.

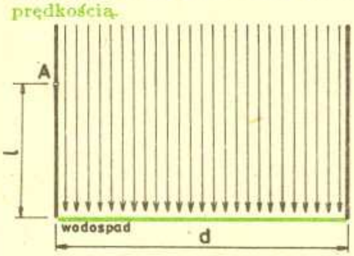
80. Wytwarza się obecnie wiązki „ultra zimnych" neutronów o energii kinetycznej 10^{-7} eV. Jaka jest prędkość tych neutronów i jak zachowują się one w ziemskim polu grawitacyjnym ? Czy wiązka „ultra zimnych" neutronów ulega dyfrakcji na kryształach ? W jaki sposób można by przechowywać takie neutrony przez pewien czas (krótszy od czasu życia swobodnego neutronu) w ograniczonej przestrzeni ?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1988

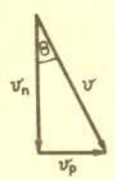
Przypominamy treść zadań

71. Rzeka o jednorodnym wartkim nurcie i szerokości d opada w pewnym miejscu gwałtownym wodospadem (rys.1). W odległości l od wodospadu, w górę rzeki (w punkcie A) skacze do wody pływak, pragnący przepłynąć na drugi brzeg. W jakim kierunku powinien on płynąć, aby mieć największe szanse osiągnięcia drugiego brzegu powyżej wodospadu ? Przyjmujemy, że pływak płynie cały czas ze stałą (największą osiągalną) prędkością.

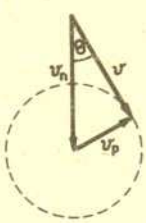
72. W wyniku parowania wody wzrosła wilgotność powietrza nad jeziorem z 60% do 90%, nie uległa natomiast zmianie ani temperatura powietrza $T = 300$ K, ani ciśnienie atmosferyczne $p = 100$ kPa. Czy zmieniła się przy tym gęstość samego powietrza (bez pary wodnej) ? Jeśli tak, to w jakim stosunku ? Ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze 300 K wynosi 3,5 kPa.



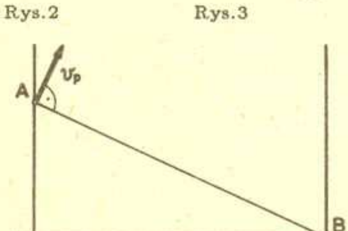
Rys.1



Rys.2



Rys.3



Rys.4

71. Załóżmy, że znany jest stosunek prędkości pływaka względem wody v_p do prędkości nurtu rzeki v_n. Jeśli $v_p/v_n > d/l$, pływak może płynąć prostopadle do brzegu, co zapewnia przebycie rzeki w najkrótszym czasie. Wektor prędkości wypadkowej $\mathbf{v}$ tworzy wówczas z brzegiem kąt $\Theta = \operatorname{arctg}(v_p/v_n)$ (rys.2). W przypadku, gdy $v_p > v_n$, można uzyskać dowolną wartość kąta Θ, odpowiednio dobierając kierunek wektora $\mathbf{v}_p$. Dla $v_p < v_n$ maksymalny kąt Θ jest osiągany, gdy $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_p$ (rys.3). Warunkiem sukcesu jest $\Theta > \alpha$, gdzie $\alpha = \operatorname{arctg}(d/l)$, skąd wynika

$$(*) \qquad \frac{v_p}{\sqrt{{v_n}^2 - {v_p}^2}} \geq \frac{d}{l}.$$

Jeśli stosunek v_p/v_n jest nieznany, powinno się postępować jak w przypadku granicznym, dla którego we wzorze $(*)$ występuje znak równości. Oznacza to prostopadłość wektora $\mathbf{v}_p$ do linii AB (rys.4). Ten sposób postępowania gwarantuje bezpieczne przepłynięcie rzeki, o ile to tylko możliwe.

72. Ciśnienie atmosferyczne jest równe sumie ciśnień parcjalnych poszczególnych składników powietrza. Ponieważ ciśnienie parcjalne pary wodnej wzrosło o $\Delta p = (90\% - 60\%) \cdot 3,5$ kPa ≈ 1 kPa, a ciśnienie atmosferyczne nie uległo zmianie, wobec tego ciśnienie pozostałych składników powietrza zmalało o Δp. Traktując suche powietrze jako gaz doskonały o pewnej średniej masie molowej, możemy napisać równania Clapeyrona dla jednostkowej objętości V zawierającej odpowiednio w początkowej i końcowej sytuacji n_1 i n_2 moli gazu:

$$p'V = n_1 \mathrm{R}T, \qquad (p' - \Delta p)V = n_2 \mathrm{R}T,$$

gdzie $p' = p - 60\% \cdot 3,5$ kPa$=98$ kPa jest początkowym ciśnieniem suchego powietrza, R – stałą gazową. Stąd znajdujemy poszukiwany stosunek gęstości:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p' - \Delta p}{p'} = 0,99.$$