Grupy Liego

Doc. dr Wojciech WOJTYŃSKI

Grupy te pojawiły się około roku 1870 za sprawą pracującego w Niemczech norweskiego matematyka Sophusa Lie. Chciał on zastosować do równań różniczkowych metody podobne do tych, jakie stworzył dla badania rozwiązalności równań algebraicznych Evariste Galois. Jego nadzieje w tej mierze ziściły się tylko częściowo, jednak klasa grup odkryta przy tych badaniach okazała się ważniejsza od problemu, którego rozwiązaniu miała służyć.

Początkowo bardzo geometryczna i lokalna teoria grup Liego dzięki pracom Engela, Killinga i Cartana uzyskała głęboki sens algebraiczny stając się jednym z podstawowych narzędzi globalnej geometrii różniczkowej. W latach trzydziestych zaczęła się, trwająca do dzisiaj, inwazja metod teorii grup Liego w fizyce. Obecnie grupy Liego są jednym z podstawowych pojęć współczesnej matematyki.

Znaczenie grup Liego wynika z następujących okoliczności:
(A) Warunki, jakim ma odpowiadać grupa Liego, nie są bardzo ograniczające - istnieje dużo grup Liego.
(B) Pomimo owego „liberalizmu" warunki te wymuszają bardzo specjalną strukturę algebraiczną pozwalającą na szczegółowy i konkretny opis.
(C) Wszystkie naturalne i ważne grupy, mające „charakter geometryczny", są grupami Liego.

Z tych powodów grupy Liego umożliwiają w wielu sytuacjach (punkt (A)) ujęcie ilościowe (oferując rodzaj „współrzędnych" - punkt(B)) z pozoru bardzo niesprecyzowanych sytuacji. Głębsza analiza (której tu, niestety, nie możemy przeprowadzić) pokazuje, że grupy Liego są obiektami o bardzo regularnej strukturze, której często „w zastanej sytuacji" zupełnie nie widać. Co więcej, do wykrycia tej struktury (za sprawą teorii grup Liego) wystarczą proste kryteria. A świat, jak się okazuje (punkt (C)), jest zbudowany bardziej regularnie, niż to na pierwszy rzut oka widać. Grupy Liego stanowią instrument pozwalający tę ukrytą regularność ująć w ścisłe formuły.

Artykuł ten nie będzie ścisłym i metodycznym wykładem teorii grup Liego - skoncentrujemy się na ukazaniu na przykładach wymienionych wyżej aspektów (A), (B) i (C).

Zaczniemy od nieformalnej definicji: grupy Liego to takie grupy, które można lokalnie (czyli po podzieleniu na odpowiednio małe fragmenty) utożsamić (dla każdego fragmentu z osobna) z fragmentem przestrzeni $\mathbf{R}^n$ (przy ustalonym n) i, w efekcie tego utożsamienia, opisywać za pomocą współrzędnych. We współrzędnych tych działanie grupowe wyraża się za pomocą funkcji różniczkowalnych, tzn. współrzędne elementu będącego wynikiem działania na elementach x i y są funkcjami różniczkowalnymi współrzędnych tych elementów.

A oto przykłady, które powinny zasugerować, że definicja ta spełnia warunek (A).

Przykład 1. Niech G będzie zbiorem wszystkich przekształceń g przeprowadzających $\mathbf{R}^1$ w $\mathbf{R}^1$, które spełniają warunek

$$(1) \qquad \frac{g(x_1)-g(x_2)}{g(x_2)-g(x_3)} = \frac{x_1-x_2}{x_2-x_3}$$

dla parami różnych $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbf{R}^1$.

Zauważmy, że dla dwóch przekształceń $g_1,\ g_2 \in G$ także ich złożenie należy do G. Zauważmy też, że gdy $x_2 \neq x_3$, to również $g(x_2) \neq g(x_3)$ - zatem każde przekształcenie $g \in G$ jest różnowartościowe. Przez proste sprawdzenie stwierdzamy, że do zbioru G należą wszystkie przesunięcia, tj. przekształcenia postaci $x \to x - b$. Więc dla dowolnego przekształcenia g, należącego do G, również przekształcenie $g_0(x) = g(x) - g(0)$ należy do G. W ten sposób dowolne przekształcenie $g \in G$ okazało się złożeniem przekształcenia g_0, które ma własność $g_0(0) = 0$ i przesunięcia: $g(x) = g_0(x) - g(0)$. Podstawiając dla g_0 w formule (1) $x_2 = 0$ otrzymamy $\frac{g_0(x_1)}{-g_0(x_3)} = \frac{x_1}{-x_3}$, a więc $g_0(x_1) = \frac{g_0(x_3)}{x_3} \cdot x_1$. Ustalmy $x_3 \neq 0$ i oznaczmy $\frac{g_0(x_3)}{x_3} = a$. Zatem $g_0(x) = ax$, przy czym $a \neq 0$ (dlaczego ?). Ostatecznie, przyjmując $b = g(0)$, widzimy, że dowolne przekształcenie $g \in G$ ma postać

$$(2) \qquad g(x) = ax + b, \quad \text{gdzie} \quad a \neq 0 \quad \text{i} \quad a,\ b \in \mathbf{R}^1.$$

Przekształcenia należące do G okazały się wzajemnie jednoznaczne (przekształcenie odwrotne do g wyraża się wzorem $g^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$). Zatem G jest grupą. Przyporządkowując przekształceniu danemu wzorem (2) parę liczb (a,b) otrzymujemy wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie grupy G w zbiór $A = \{(a,b) \in \mathbf{R}^2 : a \neq 0\}$. Oznaczając przekształcenie (2) przez $g_{(a,b)}$ mamy

$$g_{(a,b)}\, g_{(c,d)}(x) = a(cx+d) + b = (ac)x + (ad+b),$$

co w zbiorze A odpowiada działaniu

$$(a,b)(c,d) = (ac, ad+b).$$

Przykład 2. Niech G będzie zbiorem wszystkich izometrii $\mathbf{R}^2$ (tj. przekształceń nie zmieniających odległości). Jak wiadomo (choćby ze szkoły), izometrie tworzą grupę.

Podobnie jak poprzednio wyróżnimy wśród nich przesunięcia $\mathbf{x} \to \mathbf{x} - \mathbf{b}$ (teraz $\mathbf{x},\ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$) i każdej izometrii g przyporządkujemy przekształcenie g_0 zachowujące $\mathbf{0}$ dane wzorem $g_0(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{0})$.

Ponieważ izometrie przeprowadzają środek odcinka na środek odcinka, więc dla dowolnego $g \in G$ i $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ mamy

$$(3) \qquad g\left(\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\right) = \frac{1}{2}\big(g(\mathbf{a}) + g(\mathbf{b})\big),$$

W szczególności, biorąc $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, mamy $g_0\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}\right) = \frac{1}{2}g_0(\mathbf{a})$, skąd przez indukcję otrzymujemy $g_0\left(\frac{1}{2^n}\mathbf{a}\right) = \frac{1}{2^n}g_0(\mathbf{a})$ dla $n = 1, 2, \ldots$
Z kolei zauważmy (jak ?), że z (3) wynika

$$(4) \qquad g_0(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = g_0(\mathbf{a}) + g_0(\mathbf{b}),$$

co łącznie daje $g_0\left(\frac{k}{2^n}\mathbf{a}\right) = \frac{k}{2^n}g_0(\mathbf{a})$, dla $k, n = 0, 1, 2, \ldots$
Ponieważ, dla ustalonego $\mathbf{a}$, przekształcenie $t \to g_0(t\mathbf{a})$ jest ciągłe, więc otrzymujemy stąd

$$(5) \qquad g_0(\lambda\mathbf{a}) = \lambda g_0(\mathbf{a}), \text{ dla każdego } \lambda \in \mathbf{R}^1.$$

Własności (4) i (5) dowodzą, że przekształcenie g_0 jest wyznaczone przez swoje wartości dla $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ i $\mathbf{e}_2 = (0,1)$. Istotnie, wobec $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, mamy $g_0(\mathbf{x}) = x_1 g_0(\mathbf{e}_1) + x_2 g_0(\mathbf{e}_2)$. Zauważmy też, że znajomość $g_0(\mathbf{e}_1)$ wyznacza $g_0(\mathbf{e}_2)$ z dokładnością do znaku (dlaczego ?). Patrząc na $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ jak na zaczepione w $\mathbf{0}$ wektory stwierdzamy, że izometria g_0 jest albo obrotem, albo złożeniem odbicia względem osi wyznaczonej przez $\mathbf{e}_1$ i obrotu.

Zbierając razem te wszystkie spostrzeżenia otrzymujemy

$$(6) \qquad g(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) + g(\mathbf{0}) = r\,\epsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{b},$$

gdzie $\mathbf{b} = g(\mathbf{0})$, ϵ jest odbiciem w pierwszej osi lub identycznością, a r - obrotem wokół $\mathbf{0}$ przeprowadzającym $\mathbf{e}_1$ na $g_0(\mathbf{e}_1)$.

Jak łatwo zauważyć, zbiór wszystkich izometrii $\mathbf{R}^2$ dzieli się w sposób naturalny na dwie części: zbiór tych izometrii, które w rozkładzie (6) mają ϵ będące identycznością (nazywa się je izometriami parzystymi) i zbiór tych izometrii, w których ϵ jest odbiciem. Dalej zajmiemy się dla uproszczenia tylko tym pierwszym zbiorem, który, jak można sprawdzić, jest grupą – oznaczmy ją przez G'.

Każde przekształcenie z G' jest więc postaci

(7) $$g(\mathbf{x}) = r(\mathbf{x}) + \mathbf{b}\,.$$

Nasuwa się oczywista parametryzacja G' – każdemu przekształceniu przyporządkowujemy kąt obrotu i wektor przesunięcia. Odwzorowujemy w ten sposób G' w $\mathbf{R}^3$ (bo wektor ma dwie współrzędne). Aby to odwzorowanie było wzajemnie jednoznaczne, musimy ograniczyć się do kątów z przedziału $\langle 0; 2\pi)$. Wówczas dowolnemu $g \in G'$ jest przyporządkowana trójka (α, b_1, b_2), gdzie α to kąt obrotu r ze wzoru (7), a $(b_1, b_2) = \mathbf{b}$ – przekształcenie to oznaczymy $g_{(\alpha,b_1,b_2)}$. I znów, jak w przykładzie 1, możemy znaleźć obraz składania przekształceń grupy G' w zbiorze parametrów $B = \{(\alpha, b_1, b_2) \in \mathbf{R}^3 :\ 0 \le \alpha < 2\pi\}$. Jeśli umówimy się, że dodawanie kątów będziemy przeprowadzali z dokładnością do 2π, to

$$g_{(\alpha,b_1,b_2)}\, g_{(\beta,c_1,c_2)}(\mathbf{x}) = r_\alpha\big(r_\beta(\mathbf{x}) + (b_1, b_2)\big) + (c_1, c_2) =$$

$$= r_\alpha r_\beta(\mathbf{x}) + r_\alpha\big((b_1, b_2)\big) + (c_1, c_2) =$$

$$= r_{\alpha+\beta}(\mathbf{x}) + (b_1 \cos\alpha - b_2 \sin\alpha + c_1, b_1 \sin\alpha + b_2 \cos\alpha + c_2)\,,$$

czyli

$$(\alpha, b_1, b_2)(\beta, c_1, c_2) =$$

$$= (\alpha + \beta, b_1 \cos\alpha - b_2 \sin\alpha + c_1, b_1 \sin\alpha + b_2 \cos\alpha + c_2)\,.$$

Przykład 3. Niech G będzie grupą ruchów bryły sztywnej wokół jej nieruchomego środka ciężkości (fizycy powiedzieliby: G jest przestrzenią konfiguracyjną dla ruchów bryły wokół środka ciężkości). Można wykazać, że każdy ruch z grupy G jest obrotem wokół pewnej osi (przechodzącej przez środek ciężkości). Pozwala to na sparametryzowanie grupy G.

Każdy nieidentycznościowy obrót wyznacza swoją oś obrotu jako zbiór wszystkich punktów stałych. Ustalmy zwrot tej osi tak, by kąt obrotu był dodatni (zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej) i zawarty w przedziale $(0; \pi\rangle$. W ten sposób (w ustalonym układzie współrzędnych o początku w środku ciężkości bryły) każdemu nieidentycznościowemu obrotowi $g \in G$ przyporządkować możemy wektor jednostkowy $\mathbf{v}$ osi obrotu i liczbę $\varphi \in (0; \pi\rangle$. Zauważmy, że pary $(\mathbf{v}, \pi)$ i $(-\mathbf{v}, \pi)$ odpowiadają temu samemu obrotowi. Ale zamiast pary $(\mathbf{v}, \varphi)$ możemy wziąć wektor $\varphi \cdot \mathbf{v}$. Dołączając do tak otrzymanych wektorów jeszcze wektor $\mathbf{0}$, jako odpowiadający przekształceniu identycznościowemu, otrzymujemy odwzorowanie grupy G w kulę $K \subset \mathbf{R}^3$ o środku w $\mathbf{0}$ i promieniu π, w której utożsamia się pary punktów antypodycznych (końce średnic) ograniczającej ją sfery. Odwrotnie, każdemu punktowi $\mathbf{a} \in K$ odpowiada obrót o kąt równy odległości $\mathbf{a}$ od $\mathbf{0}$ i (jeśli $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$) o osi wyznaczonej przez wektor $\vec{\mathbf{0a}}$.

Postaramy się teraz zasugerować istnienie struktury, o której mowa w warunku (B).

Przykład 4. Niech G będzie grupą dodatnich liczb rzeczywistych z mnożeniem jako działaniem grupowym. Grupa ta dana jest bezpośrednio jako fragment $\mathbf{R}^1$, jest więc grupą Liego w sensie naszej definicji. Mimo to wprowadzimy jej parametryzację przyporządkowując (dodatniej) liczbie x, rozumianej jako element grupy G, liczbę $\log_{10} x$, rozumianą jako element $\mathbf{R}^1$. W wyniku tego przekształcenia (ponieważ $\log_{10}(xy) = = \log_{10} x + \log_{10} y$) działanie grupowe w G przechodzi na dodawanie parametrów.

Oczywiście w ogólnej sytuacji nie ma możliwości uzyskania utożsamienia fragmentu grupy G zawierającego element neutralny z fragmentem $\mathbf{R}^n$ zawierającym zero w ten sposób, by działanie grupowe tłumaczyło się po prostu na dodawanie odpowiednich wektorów $\mathbf{R}^n$ – dodawanie takie jest bowiem przemienne, a grupa G niekoniecznie. Można jednak uzyskać takie utożsamienie, że w obrębie poszczególnych prostych przechodzących przez zero dodawaniu wektorów odpowiada mnożenie odpowiadających im elementów grupy. Traktując takie utożsamienie jako odwzorowanie F z $\mathbf{R}^n$ do G otrzymamy warunek

(8) $$F\big((t_1 + t_2)\mathbf{x}\big) = F(t_1\mathbf{x}) \cdot F(t_2\mathbf{x}) \text{ dla } \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\,.$$

Definiując teraz, dla ustalonego $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, funkcję $f_\mathbf{x} : \mathbf{R} \to G$ wzorem $f_\mathbf{x}(t) = F(t\mathbf{x})$ możemy przepisać (8) w postaci

(9) $$f_\mathbf{x}(t_1 + t_2) = f_\mathbf{x}(t_1) \cdot f_\mathbf{x}(t_2)\,.$$

W przypadku parametryzacji z przykładu 4 funkcja tak otrzymana ma postać $f_\mathbf{x}(t) = 10^{t\cdot x} = (10^x)^t$, jest więc funkcją wykładniczą. W związku z tą sytuacją każdą parametryzację o własności (8) nazywamy odwzorowaniem wykładniczym. Funkcje o własności (9) nazywamy grupami jednoparametrowymi. Obraz takiej funkcji jest bowiem sam grupą Liego, lokalnie identyczną (jako grupa) z $\mathbf{R}^1$ z dodawaniem jako działaniem grupowym.

Przykład 5. Niech dane będzie naczynie (zbiór) N wypełnione cieczą. Niech G będzie grupą ruchów tej cieczy. Nie chcemy tu precyzować, jakiego typu ruchy nas interesują. Podamy natomiast przykład rodziny ruchów tworzących grupę jednoparametrową.

Wyobraźmy sobie, że na cząsteczki cieczy działa jakieś pole sił w ten sposób, iż prędkość chwilowa każdej cząsteczki przepływającej przez ustalony punkt jest taka sama w każdym momencie (tak np. może płynąć woda w potoku). Określone w ten sposób pole prędkości jest przykładem pola wektorowego, które wyobrażamy sobie jako rodzinę strzałek, a mówiąc językiem mniej naiwnym, każdemu punktowi przyporządkowana jest trójka liczb – współrzędne zaczepionego w tym punkcie wektora. Zatem pole wektorowe to trzy funkcje liczbowe określone na zbiorze N. Określmy rodzinę przekształceń φ_t zbioru N – parametr t będziemy interpretowali jako czas. Wartość przekształcenia φ_t w punkcie x określimy jako położenie w chwili t cząsteczki, która w chwili 0 znajdowała się w punkcie x. Czytelnik zechce sam uzasadnić formułę

(10) $$\varphi_{t_1+t_2}(x) = \varphi_{t_1}\big(\varphi_{t_2}(x)\big)\,.$$

Oznacza ona, że odwzorowanie $t \to \varphi_t$ jest grupą jednoparametrową.

To, że parametryzacja wykładnicza istnieje dla każdej grupy Liego, jest pierwszym podstawowym wynikiem teorii grup Liego (tzw. pierwsze twierdzenie Liego).

Przykład 6. Parametryzacja grupy G z przykładu 1 nie jest wykładnicza (tj. nie spełnia warunku(8)). Czytelnik zechce sprawdzić, że w przypadku omawianej grupy wykładnicza jest parametryzacja

$$(u, v) \to g_{\left(a^n, \frac{a^n-1}{n}\cdot v\right)}\,, \text{ gdzie } (u, v) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Parametryzacja ta dotyczy tylko części grupy G składającej się z odwzorowań $x \to ax + b$ przy $a > 0$.

Przykład 7. Proszę sprawdzić, że dla grupy omawianej w przykładzie 3, dla każdego wektora $\mathbf{v}$ funkcja $t \to (\mathbf{v}, t)$ jest jednoparametrową grupą w G. W szczególności wprowadzona w przykładzie 3 parametryzacja jest wykładnicza.

Wprowadzenie wykładniczej (kanonicznej) parametryzacji jest pierwszym krokiem w badaniu grup Liego. Krok drugi (znacznie trudniejszy) polega na określeniu na przestrzeni $\mathbf{R}^n$ (której fragment wokół zera stanowi zbiór parametrów przy parametryzacji kanonicznej) działania algebraicznego, związanego z działaniem grupowym w G, które przyporządkowuje parze wektorów $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ trzeci wektor, zwany ich iloczynem (lub nawiasem) Liego i oznaczany $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. W przypadku grupy z przykładu 3 odpowiednią przestrzenią jest $\mathbf{R}^3$, a nawiasem Liego wektorów jest ich iloczyn wektorowy.

Przestrzeń $\mathbf{R}^n$ z nawiasem Liego nazywa się wtedy algebrą Liego grupy G. Jej struktura algebraiczna koduje całkowitą informację o lokalnej strukturze G (tj. o tym, jaka jest grupa G w otoczeniu jedynki). Analiza możliwych postaci algebr Liego pozwala więc lokalnie opisać odpowiadające im grupy. Taki jest wierzchołek góry lodowej zwanej teorią grup Liego.

Pętelki na torusie

Mamy torus i mamy lepką, rozciągliwą nić. Słowo „lepka" oznacza, że raz przyłożona do torusa już się od niego oderwać nie może. Może się natomiast dowolnie na nim przemieszczać. I owijamy torus tą nicią. Np. 3 razy przez otwór, potem 2 razy dookoła całego torusa, potem 5 razy przez otwór, ale w przeciwną stronę i 3 razy dookoła całego w tę samą stronę co poprzednio.

Interesują nas tylko takie owinięcia, w których koniec nitki jest połączony z jej początkiem. Na takich owinięciach będziemy rachować. Podstawową sprawą przy rachowaniu jest odpowiedź na pytanie, jakie obiekty są równe. Za jednakowe (czyli równe) owinięcia będziemy uważali takie, które można nałożyć przez przemieszczanie nici na torusie.

Dodawać owinięcia będziemy w naturalny sposób: po wykonaniu jednego owinięcia nie łączymy jeszcze jego początku z końcem, tylko koniec traktujemy jako początek drugiego owinięcia, wykonujemy je i dopiero jego koniec łączymy z początkiem pierwszego.

Pytanie o własności dodawania owinięć wydaje się trudne, a okazuje się, że są one dokładnie takie jak własności dodawania „po współrzędnych" par liczb całkowitych:

$$(k, l) + (m, n) = (k + m, l + n).$$

Gdyby udało się nam to udowodnić, to znaczyłoby to między innymi, że podany na początku przykład owinięcia jest równy takiemu: 2 razy przez otwór w przeciwną stronę, a potem 5 razy dookoła całego torusa. Bo te liczby to właśnie są oddzielnie zliczane obiegi przez otwór i oddzielnie – dookoła całości.

Widać wobec tego, jak się zabrać do dowodu – wystarczy udowodnić, że owinięcie (1 raz przez otwór, 1 dookoła i znów 1 przez otwór) jest równoważne owinięciu (2 przez otwór i 1 dookoła). Gdy te trzy owinięcia stanowią całą pętelkę, sprawa jest oczywista – wystarczy zacząć liczyć od „i znów". Nam jednak potrzebna jest możliwość zamiany kolejności owijania również wtedy, gdy te owinięcia stanowią fragment bardziej skomplikowanej pętelki. Ale to też jest proste do sprawdzenia – rysunek na okładce.

Tak więc wykazaliśmy, że grupa owinięć torusa jest izomorficzna z grupą par liczb całkowitych.

Płynie stąd (i w ogóle z podobnych owijkowych rozważań na różnych powierzchniach) szereg wniosków topologicznych, ale to już inna historia.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS