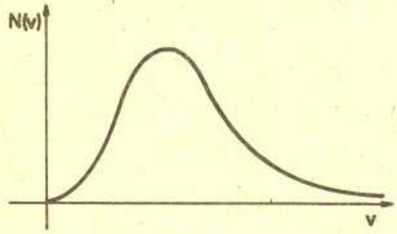
Grupy gwiazd

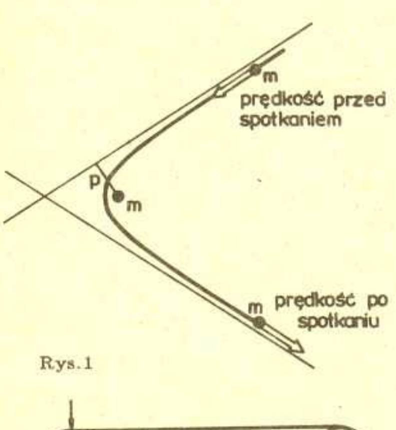
Dr Tomasz KWAST

Dla układu cząstek o jednakowych masach w równowadze termodynamicznej funkcja rozkładu Maxwella określa liczbę cząstek (gwiazd) poruszających się z prędkościami z przedziału $v \div v+\mathrm{d}v$. Ma ona postać

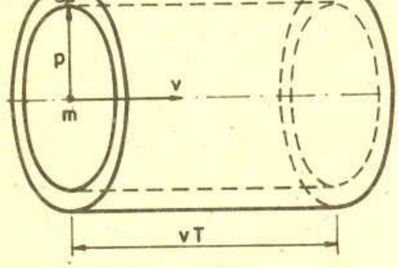
$$f(v)\mathrm{d}v = 4\pi\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha v^2} v^2 \mathrm{d}v,$$

gdzie $\alpha = \frac{3}{2\bar{v}^2}$, a kreska oznacza wartość średnią. Orientacyjny kształt funkcji f przedstawia wykres.





Rys.1



Rys.2

Pojęcie grupy gwiazd jest pełne sprzeczności. Grupy gwiazd istnieją, o czym łatwo przekonać się spojrzawszy przez lunetę w niebo, tymczasem nie spełniają one niezbędnych aksjomatów, np. w grupie gwiazd nie ma żadnego elementu odwrotnego. Dlaczego więc grupy gwiazd istnieją ?

Pożartowaliśmy, ale ostatnie pytanie jest pytaniem niebanalnym, bowiem każda grupa gwiazd (obojętne, czy jest nią asocjacja, gromada otwarta, kulista, czy wręcz galaktyka) powinna się kiedyś rozproszyć. Mianowicie wskutek bliskich spotkań gwiazdy na siebie działają losowo, w wyniku czego gromada ulega „mieszaniu" i dąży do stanu równowagi. Jednym z tego przejawów jest „maxwellizacja" rozkładu prędkości gwiazd, zjawisko w pełni analogiczne do zachodzącego w gazie zamkniętym w naczyniu. Ale układ gwiazdowy nigdy nie ma ścianek, dlatego gwiazdy, które przypadkiem osiągnęły prędkość przekraczającą prędkość ucieczki z gromady, mogą ją opuścić. Tak więc każdy układ gwiazdowy nieustannie traci gwiazdy i nieustannie usiłuje odtworzyć „szybki koniec" rozkładu prędkości, a ścisły stan równowagi jest z zasadniczych przyczyn nieosiągalny.

Trwałość gromady zależy właśnie od tempa, w jakim zachodzi odtwarzanie rozkładu Maxwella. Miarą tego tempa jest tzw. czas relaksacji, czyli w gruncie rzeczy czas, po którym gromada się wymiesza. Precyzyjnie jest on definiowany rozmaicie – mówi się o zmianach porównywalnych z początkowymi parametrami ruchu (prędkości, energii, kierunku itp.). Okazuje się, że wszystkie te podejścia prowadzą do bardzo zbliżonych wyników. Tu spróbujemy obliczyć (stosując liczne uproszczenia), po jakim czasie suma kwadratów zmian prędkości średniej gwiazdy (zmian doznawanych przy każdym spotkaniu z inną gwiazdą) osiągnie wartość równą kwadratowi prędkości. Dodajmy, że chodzi tu, oczywiście, o prędkość gwiazdy względem innej gwiazdy, a nie względem całego układu gwiazdowego (np. wynikającą z jego rotacji).

Krok 1. Przyjmijmy, że w jednym spotkaniu o parametrze zderzenia p (rys.1) prędkość gwiazdy zmienia się o tyle, ile wynosi druga prędkość kosmiczna v w odległości p (masy gwiazd m uznajemy za jednakowe, G oznacza stałą grawitacji):

$$\Delta v = \frac{v^2}{v} = \frac{2\mathrm{G}m}{pv}.$$

Przyznaję, że jest to naciągnięte, ale wynik ten można uzyskać uczciwie, choć żmudnie. Co więcej, spotkania gwiazd na ogół zachodzą w dużej odległości (duże p, ponieważ układy gwiazdowe są raczej „rzadkie"). Dlatego prędkość v niewiele różni się od prędkości w nieskończoności i może być również rozumiana jako typowa prędkość względna.

Krok 2. Obliczmy skutek wielu spotkań doznanych przez gwiazdę w czasie T. Liczba spotkań o parametrze zderzenia $p \div p + \mathrm{d}p$ jest równa liczbie gwiazd (o gęstości przestrzennej n) w walcowej warstwie o tych promieniach i długości vT (rys.2), czyli $2\pi p \mathrm{d}p vTn$. Zatem suma kwadratów zmian prędkości przy wszelkich parametrach zderzenia wynosi

$$\sum(\Delta v)^2 = \int_{p_{min}}^{p_{max}} (\Delta v)^2 2\pi p v T n \mathrm{d}p = 8\pi \mathrm{G}^2 m^2 \frac{1}{v} nT \int_{p_{min}}^{p_{max}} \frac{\mathrm{d}p}{p} = 8\pi \mathrm{G}^2 m^2 \frac{1}{v} nT \ln\frac{p_{max}}{p_{min}}.$$

Krok 3. Z definicji T nazwiemy czasem relaksacji, gdy $\sum(\Delta v)^2$ stanie się równa v^2. Stąd

$$T = \frac{v^3}{8\pi \mathrm{G}^2 m^2 n \ln(p_{max}/p_{min})}.$$

Krok 4. Pozbywamy się p_{max}, p_{min} i v zastępując je przez bardziej „namacalne" wielkości. Jako p_{max} można przyjąć charakterystyczny rozmiar R całej gromady: $p_{max} = R$. Za p_{min} uznajmy taki parametr zderzenia, gdy przyspieszenie ze strony właśnie napotkanej gwiazdy jest równe przyspieszeniu ze strony całej gromady

$$\frac{\mathrm{G}m}{p_{min}^2} = \frac{\mathrm{G}M}{R^2}, \quad \text{skąd} \quad p_{min} = \frac{R}{\sqrt{N}},$$

gdzie $M = Nm$ jest masą całej gromady liczącej N gwiazd, przy czym $N = \frac{4}{3}\pi R^3 n$.

Twierdzenie o wiriale głosi, że w stacjonarnym układzie wielu cząstek suma energii potencjalnej i podwojonej energii kinetycznej jest równa zeru. Stąd można wyprowadzić zależność użytą w kroku 4. Założenie stacjonarności można osłabić, a samo twierdzenie stosuje się zarówno do układów gwiazdowych, jak i układów mikrocząstek, takich jak gaz w naczyniu lub pojedyncza gwiazda.

W rezultacie

$$\ln \frac{p_{max}}{p_{min}} = \frac{1}{2} \ln N.$$

Wreszcie na mocy twierdzenia o wiriale przyjmujemy, że $v^2 = GM/2R$. Po tych wszystkich podstawieniach dostajemy wreszcie

$$T = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{\frac{NR^3}{Gm}} \frac{1}{\ln N}$$

w jednostkach MKS, lub

$$T = 7,3 \cdot 10^5 \sqrt{NR^3} / \log N \text{ lat},$$

gdy R wyrazimy w parsekach, a wszystkie gwiazdy mają masę równą masie Słońca.

I tak mamy odpowiedź na nasze pytanie. Nie jest nawet szczególnie ważne, ile dokładnie gwiazd ma prędkość przekraczającą prędkość ucieczki z gromady (byle nie za dużo – nawiasem mówiąc przy rozkładzie Maxwella liczba ta wynosi 0,0074 całkowitej liczby gwiazd). Istotne jest, że jeżeli te gwiazdy uciekną, to rozkład Maxwella zostanie odbudowany po czasie T. Biorąc N i R dla realnych układów gwiazdowych można to już łatwo obliczyć. Dla Plejad $N = 300$, $R = 3,5$ pc i wtedy $T = 3 \cdot 10^7$ lat. Jest to charakterystyczne dla wszystkich gromad otwartych – rozpraszają się one w czasie porównywalnym z jednym obrotem Galaktyki. Natomiast dla typowej gromady kulistej $N = 10^5$, $R = 100$ pc i wtedy $T = 4,6 \cdot 10^{10}$ lat, co jest porównywalne z wiekiem Wszechświata. Gromady kuliste mieszają się więc bardzo powoli, są bardzo trwałe, a zdążyły się do dziś zrelaksować, ponieważ powstały dawno, w innych warunkach, gdy gęstość Wszechświata była większa. Wreszcie sama Galaktyka ma $N = 2 \cdot 10^{11}$ i $R = 15\,000$ pc, dla niej więc $T = 5,3 \cdot 10^{16}$ lat, co jest już z niczym nieporównywalne. Galaktyka jest bardzo daleka od stanu równowagi, od zrelaksowania, o czym świadczy banalny fakt, że ma ona bardzo skomplikowaną budowę.

Zadania

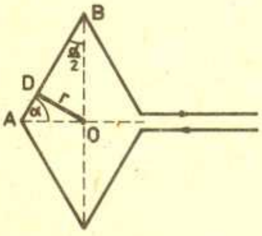
Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 526. Udowodnić, że w trójkącie prostokątnym suma długości przyprostokątnych jest mniejsza od sumy długości przeciwprostokątnej i opuszczonej na nią wysokości.
Rozwiązanie na str. 11

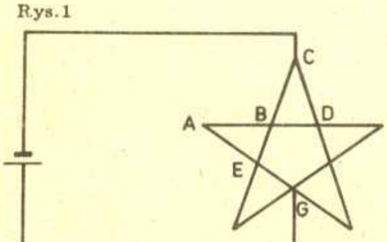
M 527. W loterii jest n losów, z czego k wygrywa, a m daje prawo do wyciągnięcia następnego losu. Jaka jest szansa wygranej ?
Rozwiązanie na str. 3

M 528. Kula toczy się po dwóch przecinających się prostych. Udowodnić, że środek kuli porusza się po łuku elipsy.
Rozwiązanie na str. 3

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI



Rys. 1



Rys. 2

F 258. Z przewodzącego drutu o oporze właściwym ρ i polu przekroju S wykonano obwód w kształcie rombu o boku a i kącie ostrym $\alpha = 60°$. Obwód podłączono do źródła prądu o sile elektromotorycznej ε na dwa sposoby – patrz rysunek 1 a i b. Obliczyć natężenie B indukcji magnetycznej w środku rombu.
Rozwiązanie na str. 2

F 259. Z odcinków drutu o jednakowym oporze R wykonano obwód przedstawiony na rysunku 2, który podłączono do źródła prądu w punktach C i G. Znaleźć stosunek ilości ciepła wydzielającego się w odcinkach drutu BD, BC, CD, AB i BE w ciągu tego samego czasu. Czy zmienią się te stosunki, jeżeli opór odcinka BD będzie równy zeru, a odcinka CD równy $2R$?
Rozwiązanie na str. 4