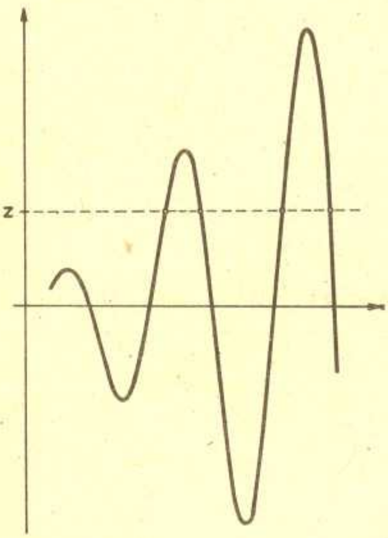
Zastanówmy się, jaka jest moc zbioru $Z \cap A_1$. Ponieważ przecięcie każdej prostej pionowej ze zbiorem $A_1$ jest co najwyżej przeliczalne, więc zbiór $Z \cap A_1$ jest sumą mniej niż continuum zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Można dowieść, że suma taka nie może mieć mocy continuum. Zrzutujmy teraz zbiór $Z \cap A_1$ na oś rzędnych. Rzut ten tym bardziej nie może mieć mieć mocy continuum (dlaczego ?) i w szczególności na osi rzędnych istnieje liczba $y$, która do niego nie należy. Wynika stąd, że prosta pozioma $L$ przechodząca przez $y$ jest rozłączna ze zbiorem $Z \cap A_1$. Prosta $L$ przecina więc zbiór $Z$ wyłącznie w punktach należących do zbioru $A_2$. Z konstrukcji wynika jednak, że zbiór punktów przecięcia dowolnej prostej poziomej ze zbiorem $Z$ jest równoliczny z $X$, a więc nieprzeliczalny. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że przecięcie zbioru $A_2$ z każdą prostą poziomą jest co najwyżej przeliczalne.




Zakończyliśmy tym samym szkic dowodu pierwszej części twierdzenia Moraynego, czyli wykazaliśmy, że istnienie szukanej funkcji implikuje hipotezę continuum. Dowód implikacji przeciwnej wykorzystuje drugą, pozostawioną przez nas bez dowodu część cytowanego wyniku Sierpińskiego, że hipoteza continuum pociąga za sobą istnienie podzbiorów $A_1$ i $A_2$ płaszczyzny o własnościach (i) i (ii). Pokażemy zatem, jak za ich pomocą zdefiniować odpowiednią funkcję. Kładziemy najpierw:

$$f_1(x) = x \cdot \sin x \quad \text{dla} \quad x \in (-1, \infty), \qquad f_2(x) = x \cdot \sin x \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty, 1),$$

gdzie $f_1$, $f_2$ mają być współrzędnymi definiowanej funkcji $f$. Dzięki takiemu określeniu w każdym punkcie co najmniej jedna z nich będzie różniczkowalna. Aby zbiorem wartości funkcji $f$ była cała płaszczyzna, wystarczy zapewnić, by przekształcała ona przedział $[1, +\infty)$ na zbiór $A_1$, a przedział $(-\infty, -1]$ na zbiór $A_2$. Pokażemy, jak zrealizować pierwszy z tych celów, w przypadku drugiego postępowanie jest analogiczne. Weźmy więc dowolną liczbę $z$ i niech $X_z$ będzie zbiorem składającym się ze wszystkich liczb $x$ z przedziału $[1, \infty)$, dla których $x \cdot \sin x = z$. Łatwo zauważyć, że $X_z$ jest zbiorem przeliczalnym. Można go zatem przekształcić na co najwyżej przeliczalny z założenia zbiór wszystkich punktów ze zbioru $A_1$ o odciętej $z$. Określmy więc funkcję $f_2$ na zbiorze $X_z$ tak, by to właśnie robiła. Sprawdzenie, że postępując w ten sposób dla wszystkich liczb $z$, zdefiniujemy poprawnie funkcję $f_2$ na całym przedziale $[1, \infty)$, oraz że funkcja $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ przekształci ten przedział na zbiór $A_1$, pozostawiamy Czytelnikowi.

## Zadania

*Redaguje dr Rafał SZTENCEL*

**M 523.** Niech $A$ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym liczby postaci $1 + 2^{-n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i zamkniętym ze względu na dodawanie. Udowodnić, że granica ciągu liczb z $A$ musi być dwójkowo-wymierna (czyli jest postaci $k \cdot 2^{-n}$, gdzie $k, n$ są całkowite nieujemne).
Rozwiązanie na str. 1

**M 524.** Niech $p$ będzie liczbą pierwszą. Przypuśćmy, że $n!$ dzieli się przez $p^k$, ale nie dzieli się przez $p^{k+1}$. Udowodnić, że

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^j} \right].$$

Rozwiązanie na str. 11

**M 525.** Niech $a$, $b$, $n$ będą naturalne. Przypuśćmy, że $a^n - b^n$ dzieli się przez $n$. Udowodnić, że $(a^n - b^n)/(a - b)$ również dzieli się przez $n$.
Rozwiązanie na str. 15

*Redaguje dr Rafał STAROŃSKI*

**F 256.** Prędkość rozchodzenia się sprężystych fal podłużnych wynosi $\sqrt{\frac{k}{\rho}}$, gdzie $k$ nosi nazwę modułu ściśliwości, a $\rho$ jest gęstością ośrodka. Na podstawie prawa Hooke'a dla sprężystych odkształceń objętościowych wykazać, że prędkość rozchodzenia się fali podłużnej można określić również jako $\sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$, gdzie $\Delta p$ i $\Delta \rho$ oznaczają zmianę ciśnienia i gęstości.
Rozwiązanie na str. 11

**F 257.** Na podstawie wyników poprzedniego zadania obliczyć prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w atmosferze w warunkach normalnych. Zakładamy, że proces rozchodzenia się fali akustycznej w atmosferze jest procesem adiabatycznym, tj. zależność ciśnienia gazu od jego objętości wyraża się wzorem $pV^{\kappa} = \text{const}$; dla powietrza w warunkach normalnych $\kappa = 1,40$.
Rozwiązanie na str. 11